كلية التجارة

جامعة الأزهر - فرع البنات

محاضرات
في
الاقتصاد القياسي

دكتورة

أمال نظير مدكور

قسم الاقتصاد

١٤٢٧ - ١٤٢٨ هـ

٢٠٠٦ - ٢٠٠٧ م

كلية التجارة
جامعة الأزهر - فرع البنات

محاضرات
في
الاقتصاد القياسي

دكتورة
أمال نظير مدكور
قسم الاقتصاد

١٤٢٧ - ١٤٢٨ هـ
٢٠٠٦ - ٢٠٠٧ م

(الفصل الأول)

تعريف الاقتصاد القياسي ومجال تقسيمه

مقدمة:

تهتم الدراسات الخاصة بالاقتصاد بمتابعة العلاقات الاقتصادية ووضعها في صورة ترتيبية منظمة لشرح الجوانب المختلفة للظواهر الاقتصادية، وقد واجهت هذه الدراسات الكثير من الصعاب بسبب تنوع العلاقات وتشابكها وتعدد المتغيرات التي تؤثر بصورة مباشرة أو غير مباشرة على هذه العلاقات موضع الدراسة والبحث. ونظرا لأن العلاقات الاقتصادية قوية التشابك وفى نفس الوقت شديدة التعقيد، الأمر الذي يجعل إيجاد نظرية متكاملة تأخذ في الاعتبار كل العلاقات أو حتى معظمها بعيدا عن مقدور اى باحث اقتصادي ،لذلك فان النظرية الاقتصادية تقتصر على أهم المعالم الاقتصادية فقط وذلك بإتباع أسلوب التجريد (Abstraction) وهو أسلوب يقوم على دراسة المتغيرات المطلوبة فقط مع ثبات المتغيرات الأخرى ، وهناك جانبان أساسيان لوضع أي نظرية اقتصادية:

أولا: وضع فروض عن الأحوال السائدة في المجتمع محل الدراسة (Assumption) على أن تكون هذه الفروض موضوعية أي ليست منافية للواقع، أمثلة على ذلك:

١- افتراض أن هناك احتكار في إنتاج بعض السلع وأن المنشأة تريد أن تختار موطن لفروعها.

٢- افتراض تجانس دالة الإنتاج.

٣- افتراض ثبات دخل الفرد خلال فترة زمنية معينة ودراسة كيفية توزيع هذا الدخل والعوامل المؤثرة على توزيع الدخل.

ثانيا: عرض العلاقات الاقتصادية والذي يعتمد على أحد أسلوبين أو كلاهما معا وهما:

١- الأسلوب الاستقرائي: وهذا الأسلوب اعتمد على التجربة والمشاهدة وقد يعرف بأسلوب التجريد. هذا الأسلوب يقوم على تحديد المشكلة موضع الدراسة وعزلها عن باقي المشاكل الأخرى حتى يمكن التعرف بدقة على جوانب المشكلة الأساسية وتقديم تفسير مقبول لها يساعد على وضع نظرية.

٢-الأسلوب الاستنباطي: وهو يقوم على أساس جمع البيانات المختلفة عن الظاهرة محل الدراسة ثم يقوم الباحث بتحليل هذه البيانات بالأسلوب اللفظي والتحليل الاحصائى ليصل فيها إلى نتائج يصيغها في النهاية في شكل نظرية عامة مثل نظريات توازن المنتج ونظريات توازن المستهلك.(عباس السيد – الاقتصاد القياسي ص ٧- ١١)

تعرفنا من هذه المقدمة على كيفية وضع نظرية اقتصادية لفظية إلا أن أسلوب تكوينها يتضمن أساليب أخرى تفسرها وأهمها:

١-الأسلوب الرياضي:

يهتم الاقتصاد الرياضي بدراسة العلاقات الكمية في صورتها المجردة والضبطية. فالاقتصاد الرياضي يحاول رسم صورة مبسطة للواقع العملي ويستبعد فيها التفصيلات الزائدة. وقد ساعد وجود الحاسب الآلي على إيجاد نماذج رياضية اقتصادية معقدة وتمكن من حلها وشمل متغيرات كثيرة وهذا مما زاد من كفاءة النماذج الاقتصادية الرياضية إلا أنه يجب معرفة أن النماذج الرياضية تعتمد على العلاقات الضبطية، وهذا يتنافى مع السلوك الانسانى حيث أنه لا يقوم على العلاقات الضبطية وذلك لأن هناك متغيرات تتدخل وتجعل عنصر العشوائية موجودا.(محمد خليل برعي ١٩٩٤ص ١٦)

مثال:

$$D = a - bP$$ (دالة الطلب)

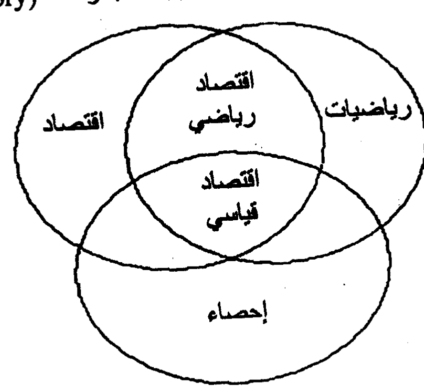
حيث أن:

- الكمية المطلوبة D
- المقطع a
- ميل دالة الطلب b
- سعر السلعة P

٢ - الأسلوب القياسي وعلاقته بالإقتصاد:

تتكون كلمة (Econometrics) من مقطعين. المقطع الأول هو الإقتصاد والمقطع الثاني هو القياس وبالتالي تترجم هذه الكلمة إلى ***الإقتصاد القياسي*** وهو عبارة عن خليط أو دمج الإقتصاد بالرياضة بالإحصاء حتى يمكن إيجاد قيم لمعلمات النموذج لتفسير علاقة المتغيرات بعضها ببعض.

وبالتالي يمكن تصور هذه العلاقة عن طريق نظرية المجموعات (Set Theory)

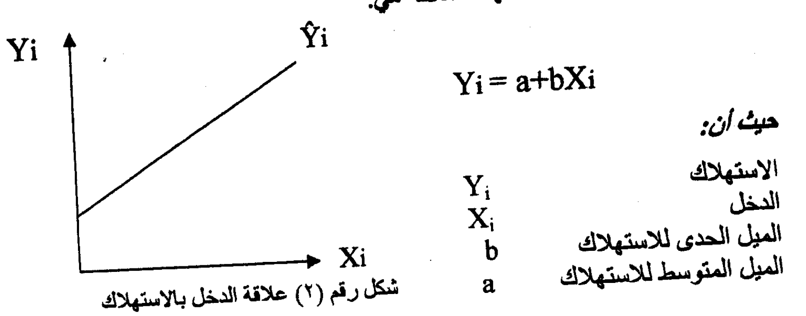


شكل رقم (١)

المصدر: مقدمة في الاقتصاد القياسي (محمد خليل برعي) ١٩٩٤/ص ١٧

ولإيضاح الفرق بين العلاقة الرياضية الضبطية والعلاقات الإحصائية يمكن استخدام دالة الإستهلاك، كمثال:

النظرية الاقتصادية تقرر أن استهلاك أي أسرة يتوقف على الدخل الممكن التصرف فيه والصورة الرياضية المبسطة لهذه العلاقة هي:



$$Y_i = a + bX_i$$

حيث أن:

الاستهلاك	Y_i
الدخل	X_i
الميل الحدى للاستهلاك	b
الميل المتوسط للاستهلاك	a

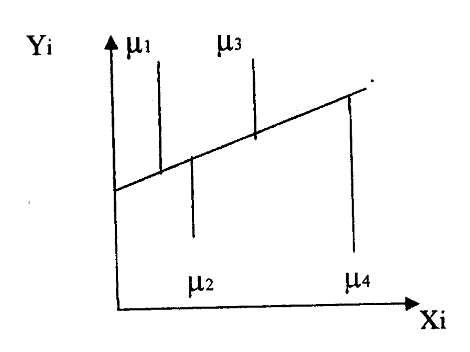
شكل رقم (٢) علاقة الدخل بالاستهلاك

وإذا أضفنا للعلاقة السابقة عنصر الخطأ العشوائي μ_i نحصل على العلاقة التالية:

$$Y_i = a + bX_i + \mu_i$$

فى هذه الحالة لا يوجد خط مناظر للعلاقة الموضحة بالشكل رقم (٣) ولكن يكون هناك انتشار للاستهلاك عند مستويات الدخل المختلفة.

ويمكن تصور العلاقة عن طريق الشكل التالى:

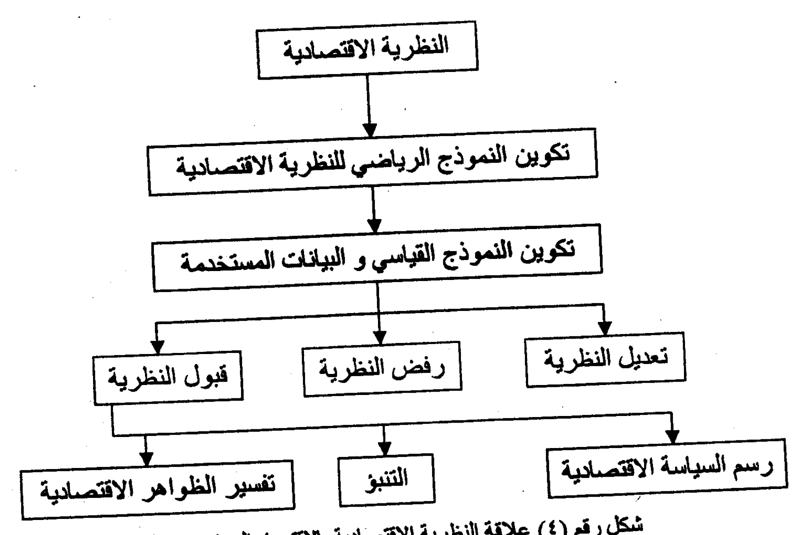


شكل رقم (٣) علاقة الدخل بالاستهلاك مع الأخذ فى الاعتبار الخطأ العشوائي

وتمثل النقط مستويات الاستهلاك المختلفة تبعا لتغير مستويات الدخل. وطبيعي أن الفرق بين أي قيمة في هذا التوزيع و القيمة المتوسطة عبارة عن قيمة (μ_i) الخاصة بالأسرة صاحبة هذه القيمة، وهذه القيمة غير معلومة مسبقا وبالتالي يجب وضع افتراضات حول قيمة المتغير العشوائي، وندرس هذه الافتراضات ونقدر الوسط الحسابي والتباين الخاص بهذا التوزيع وكذلك التغاير.

الهدف من استخدام الاقتصاد القياسي:

يمكن وضع تصور عام لأهداف الاقتصاد القياسي و علاقته بالنظرية عن طريق الشكل التالي:



شكل رقم (٤) علاقة النظرية الاقتصادية بالاقتصاد الرياضي و القياسي

والشكل السابق يوضح أن النظرية الاقتصادية يمكن وضعها في صورة رياضية وهذه الصورة الرياضية عبارة عن علاقة دالية توضح علاقة المتغيرات بعضها بالبعض الآخر، وتحدد المتغيرات التابعة والتي تتأثر بغيرها من المتغيرات وأيضا تحدد المتغيرات المستقلة والتي تؤثر في المتغير التابع مثل أثر الدخل (متغير مستقل) على استهلاك سلعة معينة (المتغير التابع). هذه الصورة الرياضية أو العلاقات الدالية علاقة ضبطية أي لا تتضمن عنصر العشوائية. إن سلوك الأفراد تجاه استهلاك سلعة معينة يختلف من شخص إلى آخر طبقا لمتغير الدخل وكذلك طبقا لشخصية كل مستهلك ومدى تعرضه لظروف مفاجئة و غير متوقعة، وبالتالي نجد أننا ندخل عنصر الخطأ العشوائي

والذي يغير العلاقات الضبطية إلى علاقات يمكن قياسها مع الأخذ في الإعتبار عنصر الخطأ العشوائي مما يقرب من الواقع.

وعندما يتكون النموذج وتجمع بيانات عن الظاهرة ويقدر هذا النموذج، نجد أننا نحصل على نتائج إما تدعم النظرية الاقتصادية اللفظية وتجعلنا نقبل هذه النظرية في تفسير الظاهرة محل الدراسة، وبناء على ذلك يمكن وضع السياسات الاقتصادية والتنبؤية.

أما إذا كانت النتائج في غير صالح النظرية فإننا نرفض هذه النظرية بحثا عن نظرية أخرى تمكننا من تفسير الظاهرة، هذا بفرض أن البيانات المجمعة بيانات سليمة.

وبالتالي نجد أن هدف الإقتصاد القياسي هو التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية إما بطريقة تفسير سلوك المتغيرات المرتبطة بالظاهرة أو التنبؤ بسلوك هذه المتغيرات والذي لم يتم مشاهدته.

(خصائص النموذج القياسي)

١- أن يكون النموذج مرتبطا بالمشكلة أو الظاهرة المراد دراستها.

٢- أن يكون النموذج بسيطا أي يسهل فهمه ومنطقي.

٣- يجب أن تكون العلاقات المستخدمة في النموذج متفقة مع النظرية الاقتصادية ويكون هذا النموذج أساسه النظرية الاقتصادية، أي مبني عليها.

٤- أن يكون النموذج قادر على تفسير العلاقات المتصلة بالظاهرة محل البحث ومستخدما للبيانات الملائمة- كذلك يجب أن يكون هذا النموذج قادر على التنبؤ.

٥- يجب أن يكون النموذج مبني على معرفة بأشكال الدوال من قبل الباحث والجدول التالي يوضح ذلك:

(التأثير الحدي والمرونة لأشكال بعض الدوال)

اسم الدالة	شكل الدالة	التأثير الحدي	المرونة
خطية	$Y=a+bX_i$	B	$B.\frac{X_i}{Y_i}$
خطية لوغاريتمية	$Y=a+bLnX_i$	B/X_i	B/Y
التربيعية	$Y=a+b_1X_i+b_2X_i^2$	B+2BX	$(B+2BX)\frac{X}{Y}$

Ramu Ramanthan Chapter5.

Introductory Econometrics With Application.

(منهج البحث وعلاقته بالاقتصاد)

يعنى المنهج العلمي في البحث بأنه "استخدام المنطق والموضوعية في فهم الظواهر"
(محمد خليل برعى ١٩٩٤، ص ١٣)

ويمر أي بحث قياسي بمراحل خمس هي:

١-) إختيار النظرية المناسبة والتي تفسر ظاهرة معينة.

٢-) تكوين النموذج المتعلق بهذه النظرية مع تعريف كلا من المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة. والنموذج قد يتكون من معادلة واحدة أو عدة معادلات.

٣-) جمع البيانات المتعلقة بهذه المتغيرات وهناك ثلاثة أنواع من البيانات:

أ-البيانات السلسلية (المنشورة) وهى بيانات تجميعية مثل أعداد السكان والدخل والاستثمار وعدد الأطباء والأجور......الخ.

ب- بيانات مقطعية وهى بيانات تفصيلية عن الوحدات الاقتصادية وتجمع عن طريق استمارة الاستقصاء، وهى نوعان:

١- بيانات منشورة:حيث يمكن للباحث أن يأخذ فترة زمنية محددة مثل السنة.فإذا رغب أن يدرس نوع صناعة(أي هل هي متزايدة العائد بالنسبة للحجم أو ثابتة أو متناقصة) والصناعات مثل صناعة الأسمنت أو الزجاج،فإذا اختيرت صناعة الزجاج مثلا فإننا نأخذ إنتاج عدد من المصانع كل مصنع على حده وعدد العمال ومقدار رأس المال وذلك كالتالي:

المصنع	الإنتاج	مقدار رأس المال	عدد العمال
مصنع بالقاهرة	100	2000	130
مصنع بالسويس	150	4000	150
مصنع بحلوان	200	8000	300
مصنع بالإسكندرية	800	15000	500

٢- بيانات تجمع عن طريق استمارة الاستقصاء وهى مجموعة من الأمثلة توزع على عينة البحث ثم تفرغ هذه الاستمارات حتى يمكن تحليلها.

ج-الملاحظة (Observation):

هي طريقة من طرق جمع البيانات المتعلقة بمعلومات معينة للكشف عن حقيقة عملية محددة مثل كفاءة أعضاء هيئة التدريس. ولكي تصبح الملاحظة وسيلة عملية يجب أن يتحقق فيها ما يلي:

١- تخدم غرض بحثي معين.

٢- تصمم بشكل منتظم.

٣- تسجل بانتظام وتكون مرتبطة بافتراضات عملية.

*وهناك أساليب متنوعة للملاحظة من أهمها:

١- الملاحظة البسيطة Simple observation، وهى ملاحظة الظواهر كما تحدث تلقائيا في ظروفها الطبيعية دون إخضاعها للضبط العلمي وبغير استخدام أدوات للقياس.

٢- الملاحظة المنظمة Structural observation، وهى تستخدم في الدراسات الوصفية أو دراسة اختبار الفروض وهذه الملاحظة مدعمة بأن الباحث يعرف الجوانب الهامة التي لها صلة مباشرة بدراسته والتي تفيد بحثه وهذا يجعله في موقف يسمح له بأن يصمم خطة لإجراء وتسجيل ملاحظاته قبل بدأ جمع البيانات.(خضر،ص ٥٥)

٤-) إختيار أسلوب التحليل المناسب لنوع البيانات والنموذج.

أ- النموذج المكون من معادلة واحدة أو عدة معادلات ويعتمد في تقدير المعلمات على استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية غير المباشرة، وتتم طريقة التقدير على مرحلتين أو عدة مراحل.

ب- النماذج التي تحتوى على متغير تابع وهذا المتغير التابع عبارة عن متغير صوري ومن أمثلة هذه النماذج (النموذج الاحتمالي، والنموذج الخطى الاحتمالي، والنموذج اللوغاريتمى الاحتمالي) ويستخدم في تحليل النموذج الأخير طريقةLikelihood التعظيم الاحتمالي الأكبر.

ج- النماذج التي تستخدم في حالة دمج البيانات الثانوية بالبيانات المقطعية،وتستخدم طريقة المربعات العامة GLS لتقدير المعلمات أو طريقة Housman and Taylor

٥-) والخطوة الأخيرة بعد التقدير هي اختبار مدى ملائمة النموذج للنظرية والتنبؤ.

(تقييم تقدير معلمات النموذج)

بعد إيجاد وتقدير معلمات النموذج سواء كان هذا النموذج مكون من معادلة واحدة أو من عدة معادلات، نجد أن الباحث يرغب في تقييم هذه النتائج وهذا هو الهدف المرغوب فيه فمعلمات النموذج تعبر عن مدى استجابة المتغير التابع للتغير في المتغيرات المستقلة وبالتالي فإنه يتبادر إلى الذهن عدة أسئلة:

هل هذه التغيرات متفقة مع النظرية من حيث اتجاه العلاقة أي هل هي علاقة عكسية أو طردية؟ وهل هذه العلاقة قوية؟ وهل هذه العلاقات غير متحيزة وذات كفاءة في التقدير؟ هذه الأسئلة يجاب عليها بالمعايير التالية:

أولا:معايير اقتصادية Economic Criteria:

هذه المعايير تحددها النظرية الاقتصادية من حيث كون العلاقة طردية أو عكسية بين متغيرات النظرية وحجم التأثير هل هو تأثير كبير أو صغير، أي مدى استجابة المتغير التابع للتغير في المتغير المستقل،فنظرية القيمة أو الأسعار توضح أن هناك علاقة عكسية بين سعر السلعة والكمية المطلوبة وأن حجم هذا التغير يتوقع أن يكون كبير،فمعامل المرونة هنا يمثل مدى استجابة المتغير التابع (الكمية) للتغير في المتغير المستقل (الأسعار).

فإذا قدرنا دالة الطلب لسلعة ما ووجدنا أن الإشارة موجبة لمعلمة السعر فإن هذه النتيجة مرفوضة وهذا النموذج غير ممثل جيد لدالة الطلب لأنه كان من المتوقع أن تكون إشارة معلمة السعر سالبة، أي أن:

$$Q_i=a-bP_i+\mu_i$$

النموذج بعد التقدير:

$$\hat{Q}_i=2.8+0.123P_i$$

يلاحظ أن معلمة النموذج المقدر ذات إشارة موجبة وهذا عكس النظرية مما يدل على أن هذا النموذج غير جيد أو غير صالح للتنبؤ مع افتراض أن السلعة عادية.

ثانيا:معايير إحصائية:

تعتبر المعايير الإحصائية النابعة من الإحصاء، الخطوة الأولى في التقييم الإحصائي والتي تمثل درجة الاعتماد على تقديرات معاملات النموذج وأكثر المعايير الإحصائية شيوعا في الاستخدام هي معامل الارتباط،r^2 ومعامل الانحدارR^2، الانحراف المعياري (σ،s)، واختبارT،واختبارF. وهذه المعايير معايير مساعدة لتفسير الظاهرة محل الدراسة والتي حددتها النظرية. فمثلا العلاقة بين متغيرين والتي توضحها r^2 (معامل الارتباط)لا تدل بأي حال على سبب العلاقة، فمعامل الارتباط ومعامل التحديد(الانحدار) لا يثبت سبب العلاقة وبالتالي تعتبر المعايير الإحصائية معايير ثانوية بالنسبة للنظرية الاقتصادية. فمثلا إذا قدرنا العلاقة بين الاستهلاك والدخل لسلعة ما، ووجد أن هذه العلاقة غير قوية أو معامل الارتباط منخفض أو ليس له معنوية إحصائية، فإن هذه النتيجة لا تدل بأي حال من الأحوال على صحة علاقة الدخل بالاستهلاك حيث أن الاستهلاك يتوقف على الدخل بغض النظر عن مصدر الدخل.

ثالثا:معايير اقتصادية قياسية Economic Criteria:

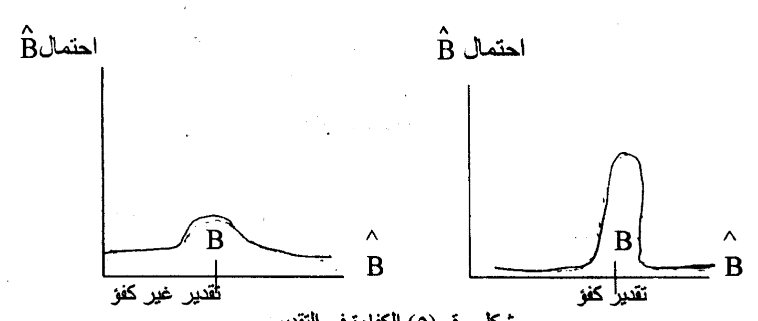
هذه المعايير توضح بواسطة الاقتصاد القياسي أو هي الفرضيات التي تفرض أو يجب أن تتوفر لكي تكون تقديرات معامل النموذج صحيحة أي غير متحيزة أو متسقة و كفؤ.ففرض عدم التحيز يعني أنه بتكرار أخذ عينة من المجتمع فإن تقدير المعلمات يؤول إلى التقدير الحقيقي للمجتمع، أي أن:

$$E(\hat{B})=B$$

أي أن المعلمة المقدرة تساوي معلمة المجتمع سواء كانت هذه المعلمة معبرة عن الميل الحدى للاستهلاك أو الميل الحدى للادخار أو تعبر عن المرونة.فإذا كان هذا التقدير متحيز فإن حجم هذا التحيز يمكن معرفته كالتالي:

$$\text{(التحيز) } Bias = E(\hat{B})-B$$

إذا كان التقدير متحيز فإن هذا هدم للنموذج ولا يؤخذ لعمل سياسات اقتصادية أو تنبؤية.أما عن فرض الكفاءة في التقدير فإنه يعني أن التباين صغير جدا لإتباع طريقة معينة في التقدير عنه إذا اتبعت طريقة أخرى ويوضح الشكل التالي كفاءة التقدير من عدم الكفاءة.



شكل رقم (٥) الكفاءة في التقدير

وبالتالي إذا كان التباين صغير وطريقة التقدير غير كفء فإن هذا يؤدى إلى اتخاذ قرار إحصائي قوى أو أن الاختبارات الإحصائية تكون سليمة مثل اختبار T، والذي يعتمد في تقديره على الانحراف المعياري للمعلمة حيثT:

$$T = \frac{\hat{b}}{\sigma_{\hat{b}}}$$

حيث أن:

اختبار T

الانحراف المعياري لمعلمة النموذج $\sigma_{\hat{b}}$

المعلمة المقدرة $\hat{b}$

وأما عن فرض الاتساق فإنه يعنى أن تقدير $\hat{B}$ يكون متسقا لمعلمة المجتمع Bإذا كانت النهاية الاحتمالية للمعلمة المقدرة $\hat{B}$تؤول إلى المعلمة الحقيقية B. ومن هنا نجد أن المتخصصين في الاقتصاد والقياس يهتمون أكثر بالاتساق في التقدير عن التحيز حيث أن التقدير المتحيز المتسق يؤول في النهاية إلى المعلمة الحقيقية حينما تكبر حجم العينة وأن المعلومات تكبر مع حجم العينة . ويمكن التعبير عن ذلك:

$$Lim=Prob\,(|B-\hat{B}|<\delta)=1$$

أي أن تقدير المعلمة $\hat{B}$ تؤول إلىBعند نهاية الاحتمال لأي قيمة (δ) أكبر من الصفر، يلاحظ أن معايير الاقتصاد القياسي هي معايير من الدرجة الثانية وتهدف إلى تقصى أو أي خرق لفروض طريقة الاقتصاد القياسي المستخدمة. هناك فروض يضعها الاقتصاد القياسي، هذه الفروض تشمل عدم الترابط بين المتغيرات المستقلة ويستخدم اختبار دربن واطسن لاختبار ذلك، وكفاءة التقدير وكل هذا سوف يأتي شرحه حينما نتناول المشكلات المتعلقة بتقدير خط الانحدار.(النعيمى، الجبران، عبد الرازق ١٩٩١ م).

الفصل الثانى

نموذج الانحدار الخطي البسيط

Simple Linear Regression Model

النماذج الاقتصادية والتي يشتق منها النماذج الرياضية والنماذج الرياضية هذا تبنـــى على أساسها النماذج القياسية؛ تتصف بالتعدد فمنها ما هو مكون من معادلة واحدة ومنـــها مـــا يتكون من عدد من المعادلات الآنية تتخللها المعادلات التوازنية أو التعريفية.

هناك طرق مختلفة لتقدير معلمات هذه النماذج وتتوقف كـــل طريقـــة علـــى طبيعـــة النموذج ذاته فهناك عدة طر ق هي:

١- طريقة المربعات الصغرى العادية، وهي تستخدم في تقدير النموذج الخطي سواء البســيط أو المتعدد.

٢- طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة وهي تستخدم إذا كانت هناك مشـــكلة ببيانـــات النموذج المستخدم.

٣- طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين أو ثلاث مراحل وهي تستخدم في النمـــاذج ذات المعادلات الآتية.

٤- طريقة الإمكان الأعظم Maximum likelilood.

سوف نبدأ بتناول الإنحدار الخطي البسيط. الإنحدار الخطي البسيط يمثل علاقـــة بيـــن متغيرين أحدهما تابع والآخر مستقل. فالمتغيرات التابعة هي التي تتأثر بغيرها من المتغـــيرات، وأما المتغيرات المستقلة فهي تؤثر في المتغيرات ولا تتأثر هي بهذه المتغيرات، ويمكن تصـــور العلاقة بين متغيرين لدالة الاستهلاك كالتالي:

$$Y_i = a + b X_i + \mu_i$$

حيث أن: Y_i . متغير تابع يمثل الاستهلاك

X_i متغير مستقل يمثل الدخل

μ_i عنصر الخطأ العشوائي

يفترض أن هناك علاقة خطية بين الإنفاق الإستهلاكي للأسرة (Y_i)، ومستوى الدخل الممكن التصرف فيه (X_i) وتمثل المقطع (a) الميل المتوسط للاستهلاك والميل (b) يمثل الميل الحدي للاستهلاك. فقد أدخل على العلاقة حد الخطأ العشوائي μ_i حتى تصلح هذه العلاقة للقياس والاختبارات الإحصائية والقياسية. إن حد الخطأ له أهمية حيث أن العلاقة الاقتصادية لا يمكن أن تأخذ الشكل المضبوط. فإذا أخذنا مجموعة من الأسر لها نفس مستوى الدخل الممكن التصرف فيه (X_i) فإننا سوف نجد أن مستوى استهلاك هذه الأسر مختلف حيث أن هناك عوامل أخرى تؤثر على الاستهلاك ولا تظهر في العلاقة والناتج عن عنصر عشوائي في السلوك الاقتصادي للبشر. هذا العنصر العشوائي هو عنصر حقيقي أي أن كل قيمة يأخذها الخطأ العشوائي (μ_i) في فترة زمنية معينة أو لشخص معين تعتمد على الصدفة وقد تكون قيمته سالبة أو موجبة أو مساوية للصفر.

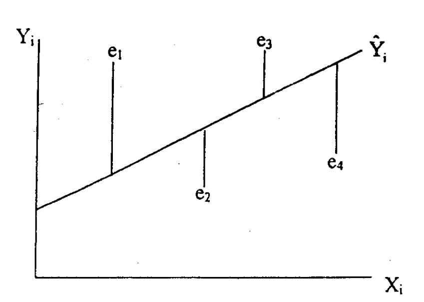
الخصائص لعنصر الخطأ العشوائي:

١- القيمة المتوقعة للخطأ العشوائي تساوي الصفر

$$E(\mu_i \mid X_i) = 0$$

وهذا يعني أنه على المتوسط فإن الانحرافات تلغي بعضها ويمكن توضيح ذلك عن طريق المثال التالي.

فإذا مثلنا دالة الاستهلاك لعدد من الأسر وكانت هناك بعض أسر لها سلوك استهلاكي خارج التوفيق الخطي كالتالي:



شكل (٦) البواقي التي لا يمكن لخط الانحدار تفسيرها

حيث أن:

$$e_1 = 10$$
$$e_2 = -2$$
$$e_3 = 2$$
$$e_4 = -10$$

فإذا جمعت هذه الانحرافات نجد أنها تساوي الصفر أي أن

$$\Sigma e_i = 0$$

٢- **الترابط بين عنصرين من الخطأ العشوائي يساوي الصفر أي أن التغاير يساوي الصفر.**

$$C_{ov}(\mu_i,\mu_j) = E[\mu_i - E(\mu_i)][\mu_j - E(\mu_j)] = 0$$

إن الترابط بين الخطأ العشوائي للعينة الأولى والخطأ العشوائي للعينة الثانية على المتوسط تساوي الصف. وهذا يعبر عن التغاير.

وهذا التغاير قد لا يساوي الصفر في البيانات السلسلية وهذا يعتبر مشكلة متعلقة بالبيانات وسوف يأتي شرحها. ولكن هذا الفرض ينص على أن الأخطاء العشوائية على اختلاف أنواعها غير مترابطة، بمعنى آخر أن أخطاء العام الماضي غير مرتبطة بأخطاء الأعوام السابقة.

٣- الخاصية الثالثة لعنصر الخطأ العشوائي هي أن تباين عنصر الخطأ العشوائي ثابت (σ^2)

$$Var(\mu_i|X_i) = E[\mu_i - E(\mu_i)][\mu_i - E(\mu_i)]$$

$$Var(\mu_i|X_i) = E[\mu_i - E(\mu_i)]^2 = \sigma^2$$

هذا الفرض يعني أن لكل قيمة X_i نجد أن الانحراف المعياري للخطأ العشوائي هو عبارة عن قيمة موجبة ثابتة أي أن $s.d = \sqrt{\sigma^2}$ ، وهذا يعني أنه طالما أن العينة مأخوذة بطريقة علمية سليمة عشوائية فإنه يتوقع أن هذا المجتمع ينحرف عن الوسط الحسابي بمقدار ثابت لكل مفرده من مفردات العينة. في الواقع نجد التباين يكون غير ثابت في بعض أنواع البيانات وخاصة البيانات المقطعية وهذه المشكلة سوف يأتي مناقشها في فصل مشكلات خط الانحدار.

٤- أن المتغير العشوائي موزع توزيعا طبيعيا وهذا تضمين أن توزيع الخطأ العشوائي حـول متوسطها المساوي للصفر يكون على شكل جرسى الشكل وذلك عند كل قيمة من قيم X_i. الفروض الأربعة تتضمن:

$$\mu_i \sim N(0,\sigma^2)$$

٥- الفرض الخامس هو أن قيم μ_i مستقلة عن المتغيرات التوضيحية

$$Cov(X_i,\mu_i) = E\{[X_i - E(X_i)][\mu_i - E(\mu_i)]\} = 0$$

$$Cov(X_i,\mu_i) = E\{ [X_i - E(X_i)][\mu_i - E(\mu_i)] \} = 0$$

$$Cov(X_i,\mu_i) = E(X_i,\mu_i) - E(X_i)E(\mu_i)]$$

$$Cov(X_i,\mu_i) = E(X_i,\mu_i)$$

$$Cov(X_i,\mu_i) = X_i E(\mu_i) = 0$$

٦- ليس هناك أخطاء في قياس المتغيرات المستقلة والتابعة.

٧- أن العلاقة المراد تقديرها محددة ووضع لها النماذج بطريقة صحيحة.

بعد التعرف على خصائص الخطأ العشوائي، يمكن لنا الآن أن نقوم بالعمليـــة التقديريـــة والتي تهدف إلى معرفة العوامل التي تؤثر في الميل الحدي للاستهلاك في مثالنا ومـــدى أهمية هذه العوامل المؤثرة من حيث المعنوية وأهمية النموذج ككـــل. والمثـــال التـــالي يوضح كيفية التقدير ولكن هذا المثال لا يتضمن عنصر الخطأ العشوائي كالتالي:

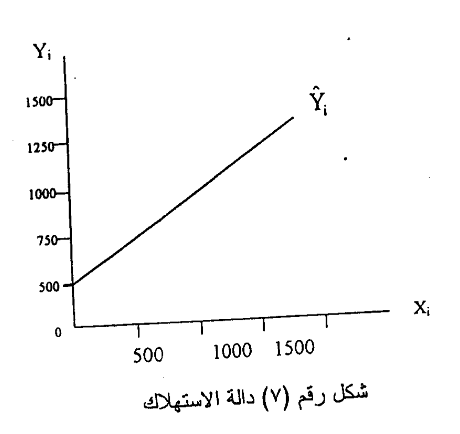
$$Y_i = a + b X_i$$

هذا النموذج يمثل معادلة خطية رياضية ضبطية وبيانات هذا النموذج كالتالي:

Y_I	X_i
500	0
7500	500
1000	1000
1250	150
1500	2000

من هذا الجدول نجد أن قيمة المقطع $\hat{a} = 500$ ويمكن تقدير الميل الحدي للاستهلاك عن طريق اختيار أي نقطتين على المنحني والممثل لدالة الاستهلاك كالتالي:

$$(Y_1, X_1) = (1000, 1000)$$
$$(Y_2, X_2) = (1500, 2000)$$



شكل رقم (٧) دالة الاستهلاك

ويمكن تقدير الميل الحدي للاستهلاك كالتالي:

$$\hat{b} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{1500 - 1000}{2000 - 1000} = \frac{500}{1000} = 0.5 \quad \hat{b}$$

والمعلمة $\hat{b}$ تدل على أنه كلما زاد الدخل بمقدار واحد في المائة نجد أن الكمية المستهلكة من سلعة معينة تزداد بمقدار خمسة من عشرة في المائة، وبالتالي تصبح المعادلة كالتالي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}Xi$$
$$\hat{Y}_i = 500 + 0.5Xi$$

إلا أن هذا المثال لا ينطبق على العالم الحقيقي حيث أن هناك سلوك عشوائي ناتج من عدم المقدرة على معرفة بعض المؤثرات وتحديدها، مثل الحروب والإضرابات وتقلبات الجو الغير متوقعة وتغير الظروف الإنسانية وبالتالي نجد أنه يجب إدخال عنصر الخطأ العشوائي لضبط كل هذه العوامل، وكما سبق، عرفنا خصائص هذا العنصر إلا أن طريقة التقدير

للنموذج والتي اقترحت كانت طريقة المربعات الصغرى العادية. هذه الطريقة تقوم على فكــرة الوصول إلى تقدير معلمات النموذج بأقل أخطاء ممكنة أي تتضمن إيجاد الخط الذي يمر بأكبر عدد من النقط بحيث يكون مربع المسافة بين النقط المتبقية والخط الذي يمر بها أصغـــر مـــا يمكن أي يؤول إلى الصفر. وطريقة التقدير (ols) لمعلمات النموذج كالتالي:

(١) $\hat{Y}_i = a + bX_i + \mu_i$ العلاقة الحقيقية قبل التقدير

(٢) $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$ العلاقة بعد التقدير

(٣) $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i + e_i$ العلاقة الحقيقية بعد التقدير

حيث أن e_i تمثل البواقي التي لم يتمكن خط الانحدار من شرحها. بطرح المعادلـة (٢) من المعادلة (٣)

(٤) $$Y_i - \hat{Y}_1 = (\hat{a} + \hat{b}X_i + e_i) - (\hat{a} + \hat{b}X_i)$$

(٥) $$Y_i - \hat{Y}_1 = e_i$$

المراد تدنية e_i إلى أقل قيمة ممكنة ولكن إذا أدخلنا علامة الجمع (Σ) على طرفـــي المعادلة (٥) فإن هناك نتيجة وقد سبق أن وضحت وهي:

(٦) $$\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i) = \Sigma e_i = 0$$

وبالتالي وجد أنه يمكن التغلب على هذه المشكلة عن طريق التربيع وإدخـــال علامـــة الجمع على طرفي المعادلة (٥)

(٧) $$\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \Sigma e_i^2$$

بالتعويض عن: $\hat{Y}_i$ في المعادلة رقم (7)

(٨) $$\Sigma e_i^2 = \Sigma[Y - (\hat{a} + \hat{b}X_i)]^2$$

بتفاضل معادلة رقم (٨) بالنسبة $\hat{b}, \hat{a}$ والتفاضل يعني بأننا نصل بقيمة (Σe_i^2) إلى أدنى قيمة ممكنة وهي الصفر.

(٩) $$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \hat{a}} = 2\Sigma(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)(-1) = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على ٢

$$-\sum Y_i + n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i = 0 \quad (١٠)$$

$$\boxed{\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i} \quad (١١)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}} = 2\sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right)\left(-X_i\right) = 0 \quad (١٢)$$

بقسمة طرف المعادلة على ٢

$$-\sum X_i Y_i + \hat{a}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2 = 0 \quad (١٣)$$

$$\boxed{\sum X_i Y_i = \hat{a}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2} \quad (١٤)$$

المعادلين (١١) ، (١٤) تسمى المعادلات الطبيعية ويمكـــن وضعـــهما فـــي صـــورة مصفوفة كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad (١٥)$$

باستخدام المحددات وقاعدة كريمر للحصول على تقدير كلا من معلمات النموذج $(\hat{a}, \hat{b})$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2 \quad (١٦)$$

$$|\Delta\hat{a}| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum Y_i X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \sum Y_i \sum X_i^2 - \sum X_i \sum Y_i X_i \quad (١٧)$$

$$\hat{a} = \frac{|\Delta\hat{a}|}{|\Delta|} = \frac{\sum Y_i \sum X_i^2 - \sum X_i \sum Y_i X_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \quad (١٨)$$

$$|\Delta\hat{b}| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i \quad (١٩)$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \quad (٢٠)$$

إيجاد قيمة $\hat{b}$ بطريقة انحراف القسم عن وسطها الحسابي

سبق أن وجدنا قيمة $\hat{b}$ باستخدام قيم المتغيرات نفسها وكانت

$$\hat{b} = \frac{n\sum Y_i X_i - \sum Y_i \sum X_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

وهي صورة مطولة نسبيا وبالتالي فإنه يلجأ في بعض الأحيان إلى الصورة المختزلـة وهي أن

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i \chi_i}{\sum \chi_i^2}$$

ويمكن الحصول عليها كالتالي:

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i \chi_i}{\sum \chi_i^2}$$

نحن نعرف أن $\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ ، $\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$ ، $\chi_i = X_i - \overline{X}$ ، $y_i = Y_i - \overline{Y}$

سوف يؤخذ جزء من قيمة $\hat{b}$ أي المقام في صورة انحرافـــات القيـــم عـــن وســـطيا الحسابي وإثبات أنه يساوي المقام في صورة القيم ذاتها، وكذلك البسط بنفس الطريقة.

أولا: المقام وإثبات أن

$$n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2 = \sum \chi_i^2$$

$$\because \sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum X_i^2 - 2\overline{X}\sum X_i + n\overline{X}^2 \quad (١)$$

بالتعويض عن $\overline{X}$ بقيمتها $\frac{\sum X_i}{n}$

$$\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum X_i^2 - 2\sum X_i \frac{\sum X_i}{n} + n\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2 \quad (٢)$$

$$\sum \chi_i^2 = \sum X_i^2 - 2\frac{(\sum X_i)^2}{n} + \frac{n(\sum X_i)^2}{n^2} \quad (٣)$$

$$\sum \chi_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} \quad (٤)$$

وهذا هو المقام

ثانيا: البسط وإثبات أن

$$n\sum Y_iX_i - \sum Y_i \sum X_i = \sum \chi_i y_i$$

$$\sum \chi_i y_i = \sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$$\sum \chi_i y_i = \sum X_i Y_i - \overline{X}\sum Y_i - \overline{Y}\sum X_i + n\overline{Y}\overline{X}$$

$$\sum \chi_i y_i = \sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n} - \frac{\sum Y_i \sum X_i}{n} + \frac{n\sum X_i \sum Y_i}{n^2}$$

$$= \sum X_i Y_i - \frac{2\sum X_i \sum Y_i}{n} + \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}$$

$$\sum \chi_i y_i = \sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}$$

وهذا هو المقام

خصائص تقديرات طريقة المربعات الصغرى العادية

Properties of the Ordinary Least Squares (OLS) Estimates

توجد عديد من طرق القياس في الاقتصاد القياسى والتي يمكن استخدامها للحصـــول على تقديرات لمعلمات النموذج الاقتصادي منها طريقة التعظيـــم المحتمـــل الأكـــبر (MLE) وطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة وطريقة المربعات الصغرى علـــى عـــدة مراحـــل وطريقة المربعات الصغرى العامة. اختيار طريقة دون أخرى يتوقـــف علـــى اتصـــاف هـــذه التقديرات بأنها تقديرات غير متحيزة ولها أصغر تباين أي أن هذه الطريقة تتصف بأنها مثلي.

تنقسم الخصائص المرغوب فيها إلى قسمين تبعا لحجم العينة فالعينة العاديـــة (عـــدد المشاهدات بها أكبر من ٣٠ مشاهدة) فإن الخصائص المرغوب فيها للمقدر هي عدم التحـــيز، أقل تباين، الكفاءة، الخطية وتكون ذات أدنى متوسط لمربعات الخطأ. أما العينة الكبـــيرة فـــإن الخصائص المرغوب فيها للمقدر (Estimator) هي تلاشى التحيز بكبر حجم العينة، واقتراب التباين إلى الصفر ويكون متسقا أي أن التوزيع للعينة يقترب من توزيع المجتمع.

في هذا الفصل سوف نحاول أن نثبت أن طريقة المربعات الصغرى العاديـــة (OLS) تتصف بأنها أفضل طريقة للتقدير وذلك لأنها خطية وغير متحيزة ولها أصغر تباين وفيما يلـــي نوضح هذه الخصائص:

١- تقديرات المربعات الصغرى العادية خطية.

خاصية الخطية خاصية مرغوب فيها لأنها تسهل عملية احتساب قيم المعلمات وتســـهل أيضا طريقة التفسير بوضوح للظاهرة محل الدراسة. تعني خاصية الخطيـــة بـــأن تقديـــرات المربعات الصغرى العادية هي دوال خطية في قيم مشاهدات العينة. وإليك إثبات الخطية:

$$\hat{b} = \frac{\Sigma \chi_i y_i}{\Sigma \chi_i^2} \quad (١)$$

$$\hat{b} = \left[\Sigma \chi_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)\right] / \Sigma \chi_i^2 \quad (٢)$$

$$\hat{b} = \left(\Sigma \chi_i Y_i - \overline{Y} \Sigma \chi_i\right) / \Sigma \chi_i^2 \quad (٣)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum \chi_i Y_i}{\sum \chi_i^2} \qquad (٤)$$

نفترض أن $\frac{\sum \chi_i}{\sum \chi_i^2} = W_i$ حيث أن المقدار هو مقدار ثابت

$$\hat{b} = \sum W_i Y_i \qquad (٥)$$

وهذا يثبت خاصية الخطية

٢- خاصية عدم التحيز.

يُعني بعدم التحيز بأنه بتكرار أخذ عينة من المجتمع فإن القيمة المتوقعة للمعلمة المقدرة تؤول إلى معلمة المجتمع. خاصية عدم التحيز ليست مفيدة في حد ذاتها ولكن فائدتها هي أنها تقدم أنه بتكرار أخذ عينة من المجتمع فإن التقدير سوف يعطينا من المتوسط قيمة المعامل الحقيقي وبالتالي نجد أنه إذا كان انتشار قيم هذه التقديرات حول المعامل الحقيقي كبيرا فإن التقديرات تصبح عديمة الفائدة حيث أنها متحيزة، ولا يمكن التوصل منها إلى قيم المجتمع أي أن:

$$E(\hat{a}) = a \qquad (٦)$$

$$E(\hat{b}) = b \qquad (٧)$$

بإعادة كتابة المعادلة (٥) والتعويض عن Y_i

$$\hat{b} = \sum W_i Y_i \qquad (٨)$$

$$\hat{b} = \sum W_i (a + bX_i + \mu_i) \qquad (٩)$$

$$\hat{b} = a \sum W_i + b \sum W_i X_i + \sum W_i \mu_i \qquad (١٠)$$

$$\hat{b} = a \frac{\sum \chi_i}{\sum \chi_i^2} + b \frac{\sum \chi_i X_i}{\chi_i^2} + \frac{\sum \chi_i \mu_i}{\sum \chi_i^2} \qquad (١١)$$

$$\hat{b} = b + \sum W_i \mu_i \qquad (١٢)$$

حيث أن: $\sum W_i X_i = 1$

$$\frac{\sum \chi_i}{\sum \chi_i^2} = 0$$

بإدخال علام التوقع

$$E(\hat{b}) = b + \sum W_i E(\mu_i) \quad (١٣)$$

$$E(\hat{b}) = b \quad (١٤)$$

حيث أن $E(\mu_i) = 0$ كما سبق أن عرفنا

٣- خاصية أصغر تباين.

خاصية أصغر تباين هي التي أكسبت طريقة المربعات الصغرى العادية شهرتها وهـذه الخاصية ليست مرغوب فيها بحد ذاتها ولكن يجب اقترانها بخاصية عدم التحـيز. إن تقديـر التباين يمثل أهمية في أنه يدخل في تقييم المتغير المستقل بالنسبة للمتغير التـابع وهـل هـذا المتغير المستقل يساعد على تفسير التغير في المتغير التابع أم لا وهذا يمكـن تقريـره عـن طريق اختبار الفرض والمعنوية الإحصائية لمعلمـات النمـوذج ويمكـن إثبـات أن طريقـة المربعات الصغرى العادية لها أصغر تباين كالتالي:

نفترض أن هناك طريقة أخرى للتقدير غير طريقة المربعات الصغرى العادية وكـان تقدير المعلمة b كالتالي:

$$\tilde{b} = \sum C_i Y_i \quad (١٥)$$

حيث أن: $C_i = W_i + d_i$ (١٦)

$$\tilde{b} = C_i (a + bX_i + \mu_i) \quad (١٧)$$

$$\tilde{b} = a \sum C_i + b \sum C_i X_i + \sum C_i \mu_i \quad (١٨)$$

$$\tilde{b} = b \sum C_i X_i + \sum C_i \mu_i \quad (١٩)$$

$$\tilde{b} = b + \sum C_i \mu_i \quad (٢٠)$$

$$\tilde{b} - b = \sum C_i \mu_i \quad (٢١)$$

بتربيع الطرفين $(\tilde{b} - b)^2 = (\sum C_i \mu_i)^2$ (٢٢)

$$Var\tilde{b} = (\sum C_i \mu_i)^2 = \mu_i^2 C_i^2 + \mu_2^2 C_2^2 + \cdots + \mu_n^2 C_n^2 \quad (٢٣)$$

$$Var\tilde{b} = \sigma_\mu^2 \sum (W_i + d_i)^2 \quad (٢٤)$$

$$\text{Var}\tilde{b} = \sigma_\mu^2 \Sigma W_i + \sigma_\mu^2 \Sigma d_i \quad (٢٥)$$

وبالتالي نجد أن

$$\text{Var}(\hat{b}) \overset{\text{اصغر}}{<} \text{Var}(\tilde{b}) \quad (٢٦)$$

حيث أن تباين المعلمة المقدرة كالتالي:

$$\text{Var}(\hat{b}) = \sigma_\mu^2 \Sigma W_i^2 \quad (٢٧)$$

$$\text{Var}(\hat{b}) = \sigma_\mu^2 \frac{\Sigma \chi_i^2}{(\Sigma \chi_i^2)^2} \quad (٢٨)$$

$$\text{Var}(\hat{b}) = \sigma_\mu^2 \Big/ \Sigma \chi_i^2 \quad (٢٩)$$

من المتعارف عليه أن تباين المجتمع غير معروف وبالتالي نجد أن هناك مـــن قــدره وذلك كالتالي:

$$\sigma_\mu^2 = \frac{\Sigma e_i^2}{n-2} \quad (٣٠)$$

٤- تقدير المعلمة يتصف بأنه ذات أصغر مربع لمتوسط الخطأ

Minimum mean-square error (MSE)

هذه الخاصية هي عبارة عن خليط من خاصية عدم التحيز وخاصية أصغـــر تبـــاين، ومربع متوسط الخطأ يعرف بأنه القيمة المتوقعة لمربع الفرق بين المعلمة المقـــدرة ومعلمـــة المجتمع الإحصائي أي أن

$$\text{MSE}(\hat{b}) = E[\hat{b} - b]^2$$

بطرح وإضافة $E(\hat{b})$ من معادلة

$$\text{MSE}(\hat{b}) = E[(\hat{b} - E(\hat{b})) + (E(\hat{b}) - b)]^2$$

$$\text{MSE}(\hat{b}) = E[\hat{b} - E(\hat{b})]^2 + 2E\{[\hat{b} - E(\hat{b})]\ [E(\hat{b} - b)]\} + E[E(\hat{b}) - b]^2$$

$$\text{MSE} = E[\hat{b} - E(\hat{b})]^2 + E(E(\hat{b}) - b)^2$$

$$\text{MSE} = \text{Var}(\hat{b}) + (\text{bias})^2(\hat{b})$$

أي مربع متوسط الخطأ يساوي تباين $\hat{b}$ زائد مربع مقدار التغير في $\hat{b}$ ، وهـــو مقدار التحيز وبالتالي نجد أن هذه الخاصية تدمج بين التحيز والكفاءة.

إيجاد القيمة التقديرية لــ σ_μ^2

$$\sigma_\mu^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

$$Y_i = a + b X_i + \mu_i \qquad (٣١)$$

بإدخال علامة Σ والقسمة على n

$$\frac{\sum Y_i}{n} = \frac{na}{n} + \frac{b\sum X_i}{n} + \frac{\sum \mu_i}{n} \qquad (٣٢)$$

$$\overline{Y} = a + b\overline{X} + \overline{\mu} \qquad (٣٣)$$

بطرح (٣٣) من (٣١)

$$Y_i - \overline{Y} = b\left(X_i - \overline{X}\right) + \left(\mu_i - \overline{\mu}\right) \qquad (٣٤)$$

$$\boxed{y_i = b\chi_i + \left(\mu_i - \overline{\mu}\right)} \qquad (٣٥)$$

(٣٦) بتقدير العلاقة ٣٥ $\hat{y}_i = \hat{b}\chi_i + 0$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \qquad (٣٧)$$

بالتعويض في معادلة (٣٧) من (٣٦)، (٣٥)

$$e_i = b\chi_i + \left(\mu_i - \overline{\mu}\right) - \hat{b}\chi_i \qquad (٣٨)$$

$$e_i = \chi_i + \left(b - \hat{b}\right) + \left(\mu_i - \overline{\mu}\right) \qquad (٣٩)$$

بتربيع طرفي المعادلة (9)

$$e_i^2 = \left[\chi_i\left(b - \hat{b}\right) + \left(\mu_i - \overline{\mu}\right)\right]^2 \qquad (٤٠)$$

$$e_i^2 = \left[\chi_i^2\left(b - \hat{b}\right)^2 - 2\chi_i\left(b - \hat{b}\right)\left(\mu_i - \overline{\mu}\right) + \left(\mu_i - \overline{\mu}\right)^2\right] \qquad (٤١)$$

بإدخال علامة Σ

$$\sum e_i^2 = \sum\left[\frac{\chi_i^2\left(b - \hat{b}\right)^2}{C} - \frac{2\chi_i\left(b - \hat{b}\right)\left(\mu_i - \overline{\mu}\right)}{B} + \frac{\left(\mu_i - \overline{\mu}\right)^2}{A}\right]$$

نقسم هذا المقدار إلى أجزاء C , B , A وإدخال علامة التوقع بأخذ

$$E(A)=E\left(\sum(\mu_i-\bar{\mu})^2\right)$$

$$E(A)=E\left(\sum\mu_i^2-2\bar{\mu}\sum\mu_i+n\bar{\mu}^2\right)$$

$$E(A)=E\left(\sum\mu_i^2-2\frac{\sum\mu_i\sum\mu_i}{n}+n\left(\frac{\sum\mu_i}{n}\right)^2\right)$$

$$\because \bar{\mu}=\frac{\sum\mu_i}{n}$$

$$E(A)=E\left(\sum\mu_i^2-2\frac{(\sum\mu_i)^2}{n}+\frac{n\sum\mu_i^2}{n^2}\right)$$

$$E(A)=E\left(\sum\mu_i^2-\frac{(\sum\mu_i^2)}{n}\right)$$

$$=\sigma_\mu^2-\frac{1}{n}\sigma_\mu^2$$

بضرب طرف المعادلة الأيمن $n\times$

$$E(A)=n\sigma_\mu^2-\sigma_\mu^2=\boxed{n\sigma_\mu^2(n-1)}$$

$$B=2(\hat{b}-b)\sum(\mu_i-\bar{\mu})\chi_i$$

بالتعويض $b-\hat{b}=\sum W_i\mu_i$

$$B=2(\hat{b}-b)(\sum\mu_i\chi_i-\bar{\mu}\sum\chi_i)$$

وحيث أن : $W_i=\frac{\chi_i}{\sum\chi_i}$

$$B=2(\sum W_i\mu_i)(\sum\mu_i\chi_i)$$

$$B=2\frac{(\sum\chi_i\mu_i)(\sum\mu_i\chi_i)}{\sum\chi_i^2}$$

إدخال علامة التوقع

$$E(B)=\frac{2E(\sum\chi_i\mu_i)^2}{\sum\chi_i^2}$$

$$=\frac{2\sum\chi_i^2E(\mu_i^2)}{\sum\chi_i^2}=2E(\mu_i)^2$$

$$\boxed{E(B)=2\sigma_\mu^2}$$

نحن نعرف أن

$$\left(b-\hat{b}\right)^2 = Var\hat{b} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sum \chi_i^2}$$

$$C = \left(b-\hat{b}\right)^2 \sum \chi_i^2$$

$$E(C) = \frac{\sigma_\mu^2}{\sum \chi_i^2} \sum \chi_i^2 = \sigma_\mu^2$$

بتجميع كل هذه الأجزاء

$$E(\sum e_i^2 = E(A) + E(B) + E(C)$$

$$E\left(\sum e_i^2\right) = \sigma_\mu^2(n-1) - 2\sigma_\mu^2 + \sigma_\mu^2 = n\sigma_\mu^2 - \sigma_\mu^2 - 2\sigma_\mu^2$$

$$= n\sigma_\mu^2 - 2\sigma_\mu^2 = \sigma_m^2(n-2)$$

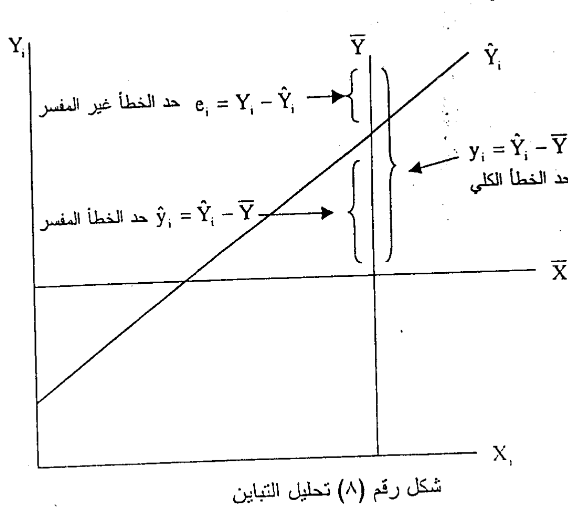
$$\boxed{\sigma_m^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

تقييم النموذج القياسي والمعنوية الإحصائية لمعلماته

لكى نقيم النموذج المقدر يحب علينا فحص التالي:

أولا: هل إشارة المعلمات المقدرة متفقة مع النظرية الاقتصادية أم لا، حيث أننـــا نتوقـــع أن العلاقة بين الدخل مثلا للسلع العادية علاقة طردية أي أن الإشارة بالموجب وهذا يعنـــي أنه كلما ازداد الدخل زادت الكمية المطلوبة من السلعة. إلا أن هناك نوع آخـــر مـــن السلع وهي السلع الرديئة والتي يتوقع أن يكون لها علاقة عكسية بين الكمية المطلوبـــة من هذه السلعة والدخل أي أن الإشارة بالسالب.

ثانيا: مدى جودة توفيق النموذج والتي تتضمن مدى جودة توفيق هذا الخط لمشاهدات العينـــة لكل من المتغير التابع والمتغيرات المستقلة. ولهذا يجب قياس تشتت المشاهدات حـــول خط الانحدار المقدر. كلما اقتربت المشاهدات من الخط المقدر كان هناك جودة توفيـــق. ويستخدم مربع معامل الارتباط (r^2) في الانحدار الخطي البسيط أو معـــامل التحديـــد (R^2)، للوقوف على مدى جودة النموذج، حيث أنهما وجهان لعملـــة واحـــدة بالنسـبة للانحدار الخطي البسيط ولكن ليس كذلك بالنسبة للانحدار الخطي المتعدد، ويمكـــن أن يمثل ذلك كالتالي:



شكل رقم (٨) تحليل التباين

ويمكن اشتقاق معامل التحديد والذي يمثل مقياس لجودة التوفيق كالتالي:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad (١)$$

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i \quad (٢)$$

بتربيع طرفي المعادلة (٢) وإدخال علامة الجمع (Σ)

$$\Sigma Y_i^2 = \Sigma(\hat{Y}_i + e_i)^2 \quad (٣)$$

$$\Sigma Y_i^2 = \Sigma \hat{Y}_i^2 + 2\Sigma e_i \hat{Y}_i + \Sigma e_i^2 \quad (٤)$$

بما أن $\Sigma e_i \hat{Y}_i = 0$ **أي أنه ليس هناك ترابط بين البواقي والمتغير التابع**

$$\Sigma Y_i^2 = \Sigma \hat{Y}_i^2 + \Sigma e_i^2 \quad (٥)$$

$$Tss = Rss + Ess \quad (٦)$$

بقسمة طرف المعادلة (٥) على ΣY_i^2

$$\frac{\Sigma Y_i^2}{\Sigma Y_i^2} = \frac{\Sigma \hat{Y}_i^2}{\Sigma Y_i^2} + \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma Y_i^2}$$

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma Y_i^2}}$$

حيث أن مربع الخطأ الكلي ΣY_i^2

مربع الخطأ المشروح $\Sigma \hat{Y}_i^2$

مربع الخطأ غير المشروح Σe_i^2

إذا كانت $\frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma Y_i^2} > 1$ نجد أن $R^2 < 0$

ويجدر الإشارة الفرق بين r^2 , R^2 هو أن معامل التحديد يوضح أن العلاقة في النموذج بين المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة مبنية على السببية ولكن لا تثبتها ولكن معامل الارتباط (r^2) ليس مبنيا على السببية ولكنه مجرد علاقة إحصائية.

الطريقة الثانية لإيجاد قيمة R^2

هذه الطريقة تثبت أن $(r^2=R^2)$ مربع معامل التحديد يساوي مربع معامل الارتباط في الانحدار الخطي البسيط.

$$\because R^2 = \frac{\Sigma \hat{y}_i^2}{\Sigma y_i^2}$$

بالتعويض عن $\Sigma \hat{y}_i^2 = \hat{b}^2 \Sigma \chi_i^2$ حيث أن $\hat{y}_i = \hat{b}^2 \chi_i$

$$R^2 = \frac{\hat{b}^2 \Sigma \chi_i^2}{\Sigma y_i^2}$$

بالتعويض عن $\hat{b}$

$$\hat{b} = \frac{\Sigma \chi_i y_i}{\Sigma \chi_i^2}$$

$$R^2 = \left[\frac{\Sigma \chi_i^2 y_i}{\Sigma \chi_i^2}\right]^2 \frac{\Sigma \chi_i^2}{\Sigma y_i^2} = \frac{(\Sigma \chi_i y_i)^2}{\Sigma \chi_i \, \Sigma y_i^2} = r^2$$

وهذا المقدار يوضح العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل تربيع وبالتالي نجد انحدار X_i على Y_i هو نفسه انحدار Y_i على X_i

العلاقة بين $\bar{R}^2$ (المعدلة) و R^2

هناك مشكلة في استخدام R^2 كمقياس لجودة توفيق خط الانحدار أو النموذج وذلك لأنها تشمل التغيرات أو التغيرات الناتجة من استخدام المتغيرات المستقلة في شرح التغير في المتغير التابع والتغيرات الغير مشروحة أو التي لم يستطع النموذج تفسيرها (البواقي) فقط ولم تأخذ في الاعتبار درجات الحرية للمشكلة محل البحث. ومن هنا وجد أن الحل الطبيعي لهذه المشكلة هو استخدام التباين (Variances) وليس التغير (Variation) وبالتالي يمكن معالجة مشكلة الاعتماد على عدد المتغيرات المستقلة كمقياس لجودة التوفيق.

تعريف $\bar{R}^2$ (المعدلة R^2) كالتالي:

$$** \qquad \bar{R}^2 = 1 - \frac{Var(e)}{Var(y_i)}$$

$$Var(e_i) = \frac{\Sigma e_i^2}{N-K} \qquad Var(y_i) = \frac{\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$$

والواحد هنا يدل على أننا نقدر المتوسط فقط. يلاحظ هنا أن $\sum e_i^2$ يمكن أن تظـــل ثابتة بإضافة متغيرات مستقلة أو تقل ولكنها لا تزداد.

بالتعويض في معادلة (**)

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2 / (n-k)}{\sum y_i^2 / (K-1)} = 1 - \frac{\frac{\sum e_i^2}{n-k}}{\frac{\sum y_i^2}{n-1}}$$

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{(n-k)} \cdot \frac{(n-1)}{\sum y_i^2}$$

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \cdot \frac{(n-1)}{(n-k)}$$

$$\because \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - R^2$$

$$\overline{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2)\left(\frac{n-1}{n-k}\right)\right]$$

اختبار المعنوية الإحصائية لمعلمات النموذج ككل

يستخدم اختبار F لاختبار مدى مساهمة المعلمات ككل في تفسير التغير فـــي المتغـــير التابع، و (F) عبارة عن النسبة بين التباين المفسر والتباين غير المفسر.

والجدول التالي يوضح تحليل التباين

تحليل التباين

ANOVA

متوسط مجموع المربعات (MSS).	مجموع مربعات الأخطاء المفسر والغير مفسر (SS)	درجات الحرية (D.F)	مصدر التباين (Source)
متوسط مربعات الخطأ المفسر MRSS $\frac{\sum \hat{y}_i^2}{(k-1)}$	RSS $\sum \hat{Y}_i^2 = (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$	K -1	أخطاء مفسرة عن طريق خط الانحدار $\hat{y} = (Y_i - \hat{Y})$
متوسطة مربعات الخطأ الغير مفسر MESS $\frac{\sum e_i^2}{(N-k)}$	ESS $\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y})^2$	(n – k)	أخطاء غير مفسرة $e_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$
$F_{N-k}^{N-1} = \frac{MRSS}{MESS}$	TSS	N-1	الخطأ الكلي TS

خطوات الاختبار كالآتي:

(١) الفرض العدمى لاختبار F هو أن جميع معلمات خط الانحدار تساوي الصفر

$$H_o : a = b = 0$$

والفرض البديل (H_1) هو ليست كل قيم المعلمات تساوي الصفر

(٢) تحسب قيمة (F)

$$F = \frac{\sum \hat{y}^2 / (k-1)}{\sum e_i^2 / (n-k)} = \frac{MRSS}{MESS}$$

(٣) تقارن F المحسوبة بــ(F) الجدولية فإذا كانت أكبر فإننا نرفض الفرض العدمى لصالح الفرض البديل.

حيث أن:

مربع مجموع انحرافات قيم المتغير التابع عن وسطه الحسابي $TSS = \sum y_i^2$

مربع مجموع انحرافات قيم المتغير التابع المقدرة عن الوسط $RSS = \sum \hat{y}_i^2$

الحسابي ويطلق عليه التغير المفسر والذي يوضحه خط الانحدار

مجموع مربع البواقي (الخط العشوائي) وهو يمثل الجزء من $ESS = \Sigma e_i^2$

المتغير التابع الغير مشروح.

والذي لا يفسره خط الانحدار وهذه التغيرات ترجع إلى التغيرات العشوائية أي أنه الخطأ العشوائي الغير مفسر.

إلا أنه يلاحظ أنه الممكن أن تكون F ذات معنوية إحصائيا كبيرة وليس لأي معلمة من معلمات النموذج أهمية أو معنوية إحصائية وقد يحدث هذا عندما يكون هناك ارتباط مرتفع بين المتغيرات المستقلة بعضها ببعض وهو ما سوف يدرس إن شاء الله في مشكلات تقدير الانحدار الخطي.

علاقة F ومعامل الانحدار R^2

$$F = \frac{\Sigma \hat{y}_i^2 / k-1}{\Sigma e_i^2 / n-k}$$

بقسمة كلا من البسط والمقام على Σy_i^2

$$F = \frac{\dfrac{\Sigma \hat{y}_i^2 / k-1}{\Sigma y_i^2}}{\dfrac{\Sigma e_i^2 / (n-k)}{\Sigma y_i^2}} = \frac{\dfrac{\Sigma \hat{y}_i^2}{(k-1)} * \dfrac{1}{\Sigma y_i^2}}{\dfrac{\Sigma e_i^2}{(n-k)} * \dfrac{1}{\Sigma y_i^2}}$$

$$F = \frac{\dfrac{\Sigma \hat{y}_i^2}{\Sigma y_i^2 (k-1)}}{\dfrac{\Sigma e_i^2}{\Sigma y_i^2 (n-k)}}$$

$$\because \frac{\Sigma \hat{y}_i^2}{\Sigma y_i^2} = R^2 \qquad , \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma y_i^2} = 1 - R^2$$

وذلك من تحليل التباين

$$\because F_{n-k}^{k-1} = \frac{R^2 / (k-1)}{(1-R^2) / (n-k)} = \frac{R^2}{(k-n)} \cdot \frac{(n-k)}{1-R^2}$$

$$= \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{(n-k)}{(k-n)}$$

في الانحدار الخطى البسيط

$$F^{k-1}_{n-k} = \frac{R^2}{1- R^2} \cdot \frac{(n-2)}{(2-1)}$$

$$= \frac{R^2}{1-R^2} (n-2)$$

ثالثا: مدى أهمية المتغير المستقل بالنسبة للمتغير التابع.

نحن نعرف أن الهدف أصلا من بناء النموذج هو معرفة علاقة المتغيرات المستقلة و مدى أهميتها بالنسبة للمتغير التابع، وبالتالي نجد أننا نستخدم اختبار t لمعرفة أهمية المتغير المستقل بالنسبة للمتغير التابع ويمكن إجراء هذا الاختبار كالتالي:

١- نضع الفرض العدمى والفرض البديل كالتالي:

الفرض العدمى $H_o : a = 0$

الفرض البديل $H_i : a \neq 0$

هذا بالنسبة للمقطع أو الجزء الثابت أما بالنسبة للميل فهو:

الفرض العدمى $H_o : b = 0$

الفرض البديل $H_i : b \neq 0$

سبق أن عرفنا تقدير تباين b وكان كالتالي :

$$Var(\hat{b}) = \sigma^2_{\mu} / \Sigma\chi^2_i$$

وأن تقدير $\hat{\sigma}^2_u$

$$\hat{\sigma}^2_u = \Sigma e_i^2 / (n-k)$$

وبالتالي يمكن حساب t

$$t_{\hat{a}} = \frac{\hat{a} - a}{S_{\hat{a}}} \quad \& \quad t_{\hat{b}} = \frac{\hat{b} - b}{S_{\hat{b}}}$$

$$S_{\hat{b}} = \sqrt{\frac{\Sigma e_i^2 / (n-2)}{\Sigma\chi_i^2}}$$

حيث أن

$$S_{\hat{a}} = \sqrt{\frac{\sigma_{\mu}^{2} \sum X_{i}^{2}}{n \sum x_{i}^{2}}}$$

تقارن t المحسوبة بـ t الجدولية فإذا كانت t المحسوبة أكبر من t الجدولية فإننا نرفض الفرض العدمي في صالح الفرض البديل بأن المتغير المستقل ذات علاقة معنوية قوية بالنسبة للمتغير التابع. ويلاحظ أنه حينما لا يكون لدينا معلومات مسبقة عن إشارة معلمه المتغير المستقل فإننا نستخدم اختبار الطرفين حيث أنه من المحتمل أن المعلمة المراد اختبارها قد تأخذ قيمة موجبة أو سالبة. أما إذا كان لدينا معلومات مسبقة عن إشارة هذه المعلمة، كما هو الحالة في العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة عادية وسعرها تكون علاقة عكسية، فإننا نستخدم اختبار الطرف الواحد فإذا كان إشارة المعلمة سالبة فإنه يستخدم اختبار الطرف الأيسر وإذا كان موجبا فإنه يستخدم اختبار الطرف الأيمن.

تمارين على الانحدار الخطي البسيط

باستخدام طريقة OLS

١- إذا أعطيت لك البيانات التالية حيث أن Y هو المتغير التابع X هو المتغير المستقبل أو العكس.

X	Y
160	62
182	90
177	80
156	67
175	72
172	74
169	72
165	64
177	75
158	64

المطلوب:

أ- تقدير معلمات النموذج $\hat{B},\hat{a}$

ب- تقدير خط الانحدار بدون المقطع أي تقدير $\hat{B}$

جـ- اختبار المعنوية الإحصائية للمعلمتين

استخدمي نموذج الانحدار

١) $Y_i = a + b X_i + \mu_i$

٢) $Y_i = b X + \mu_i$

٣) $X_i = a + b Y_i + \mu_i$

٤) $X_i = b Y_i + \mu_i$

٥) اذكري الفرق بين النماذج الأربع

الحـــل

Model Summary

Model	R	R^2	$\overline{R}^2$	Std, Error of the Estimate
1	.873	.763	733	4,4039
2	.997	.995	997	

ANOVA

Model	SS	d.f	MS	F S.q
Regression	498.864	1	498.846	25.721 .001
Residual	155.154	8	19.394	
Total	654	9		

F = 1725.703

النموذج بدون مقطع $\hat{Y}_i = .427X_i$ (4.54)

النموذج بمقطع $\hat{Y}_i = -67.892 + .827X_i$

t (-2.458) (5.072)

Sig .049 .001

النموذج بمقطع $\hat{X}_i = 102.715 + .922Y_i$

7.798 5.072

(.001)

Sig .001

$R^2 = 763$ F = 25.721

$\overline{R}^2 = .733$ F = 1725.703

$R^2 = .995$ $\overline{R}^2 = .995$

٢- بافتراض أن لدينا كميات معروضة من سلعة اللحوم وأسعارها موضحة بالجدول التالي:

الكمية	السعر
2	3
3	5
7	7

المطلوب:

أ- قدري معلمات النموذج وضعيه في صورته التقديرية.

ب-اوجدى معامل التحديد علما بأن معامل الارتباط:

ج - اختبري المعنوية الإحصائية لمعلمات النموذج.

د- اوجدى مرونة دالة العرض.

خطوات تقديرات النماذج باستخدام SPSS

يمكن تنفيذ خطوات كل التمارين باستخدام SPSS والحصول على الحل باستخدام برنامج SPSS أو أي برنامج آخر مثل SAS. والخطوات كالتالي:

١- افتحي الكمبيوتروواذهبى بالمؤشر عند Start ثم Click تفتح أمامك عدة برامج اختاري SPSS واذهبي بالمؤشر إلى المسطرة السفلى وبها SPSS مباشرة ثم Click.

٢- تنفتح أمامك الشاشة بها خانات للبيانات وسوف تجدين YY في الخانة الأولى. أدخلي كل رقم على حدة ثم اضغط على Enter بعد كل رقم. أي 62 ثم Enter، 90 ثم Enter وهكذا.

٣- اذهبي مرة أخرى إلى Data وعرفي المتغير الثاني وهو (xx) اكتبي ذلك ثم Ok وأدخلي البيانات مثلما فعلت في الخطوة السابقة.

٤- بعد الانتهاء من إدخال البيانات اذهبي بالمؤشر إلى Analyze واختاري Linear وبالتالي يظهر لك جدول من أجل إدخال المتغير التابع Dependent Variable ظللي على YY بالمؤشر ثم هناك علامة ▶ اعملي على Click عندها وبالتالي ينتقل المتغير التابع إلى خانته.

٥- كرري نفس هذه العملية مع تظليل المتغير الثاني وانقليه عن طريق ▶ Click في خانة Independent Variable ، ثم بعد ذلك Click عند Ok (كل ذلك في الجدول المفتوح) تظهر لك النتائج بها تقدير لمعلمات النماذج وt المحسوبة وأنت سوف تقومين بالكشف عن t الجدولية وتقارنين النتائج وتشرحي النتيجة؟ أين هو تقدير S.D، Var. أين يوجد تقدير Σe^2 ؟

٦- كرري الخطوتين4،5 مع عمل تعديل صغير وهو حينما تذهبين بالمؤشر إلى Statistic وتختارينRegression-Linear وبالتالي سوف يظهر جدول- أدخلي المتغيرين كما سبق في خطوة رقم 5 بعد عمل Ok اذهبي بالمؤشر عند Option واعملي Click وامسحي علامة(√) من المربع الذي عنوانهInclude Constant ثم Click Ok.

٧- احفظي الملف بعد أن تضعي له اسم ثم اطبعي النتائج (وحظ طيب مع الكمبيوتر)

أسئلة عامة على الانحدار الخطي البسيط

١- اوجدى $\hat{b}$ بطريقة المربعات الصغرى العادية بطريقة X_i ، Y_i الكبيرة،ثم بطريقة انحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

٢- اثبتي أن طريقة المربعات الصغرى العادية غير متحيزة .

٣- اثبتي أن طريقة المربعات الصغرى العادية خطية.

٤- اثبتي أن طريقة المربعات الصغرى العادية لها أصغر تباين.

٥- احسبي تباين $\hat{b}$ ،اوجدى باستخدام تباين المجتمع وتباين العينة.

٦- اثبتي أن TSS=RSS+ESS.

٧- كيف تحصلين على قيمة R^2 .

٨- اثبتي أن

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma Y_i^2}$$

٩- ما هو الفرق بين:

أ- $a , \hat{a}$

ب- e_i , μ_i

ج- t , R^2

١٠- كيف تقدرين نموذج انحدار خطى بسيط باستخدام SPSS.

١١- إذا كان لديك نموذج مقدر كالتالي:

$$\hat{Y} = 0.23 - 1.83\, X_i$$
$$(1.6) \quad (-3.83)$$

حيث توضح الأرقام التي بين الأقواس الانحراف المعياري، المطلوب إيجاد المعنوية الإحصائية للمقطع و لمعلمة X_i.

١٢- إذا كانت درجات الحرية D. F. = 23

وقد قدر النموذج التالي $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}\, X_i$

اوجدى عدد مشاهدات هذه العينة (n).

١٣- إذا أعطيت لك البيانات التالية:

الدخل المتاح	الإنفاق على الملابس
82.9	8.4
88.0	9.6
99.9	10.4
105.3	11.4
117.7	12.4
131.0	14.4
148.2	15.8
161.8	17.9
174.2	19.3
184.7	20.8

المطلوب:

١- تقدير $\hat{\beta}$ وإيجاد قيمتها.

٢- اختبار المعنوية الإحصائية لها.

٣- اختبار جودة التوفيق.

ملحوظة:

لا تستخدمي الكمبيوتر من فضلك. بل استخدمي الخطوات العادية عن طريق استخدام الآلة الحاسبة حتى تعرفي خطوات الحل والتي ينفذها لك الكمبيوتر بعد، ولكن الهدف من هذا التمرين هو معرفة كيف حصلت على النتائج.

ملحقات الفصل الثاني

أولا: بعض قواعد التوقع Expectation

١- $E(a+bX)=a+bE\ (X)$

$E(a)=a$ ثابت

٢- $E\ [(bX)^2]=b^2E\ (X)^2$

٣- $var\ [a+bx]=b^2\ var(x)^2$

$var(a)=0$ ثابت

إذا كان كلا من Y ، X متغيران عشوائيان

٤- $E(x+y)=e(x)+E(y)^2$

٥- $var(x+y)-var(x)+var(y)+2Cov(x,y)$

ثانيا: بعض قواعد التفاضل

نفترض أن هناك دالة تأخذ الشكل التالي: $y_i=a+bx_i$

١- تفاضل الثابت يساوي الصفر.

٢- تفاضل حاصل ضرب متغيرين = الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول.

$$\frac{\partial Y_i}{\partial b}= b\frac{\partial b}{\partial X_i}+ X_i\frac{\partial b}{\partial b}$$

لكن $\frac{\partial Y}{\partial a}=0$

$\frac{\partial b}{\partial X_i}=0$ لأنه ثابت

وبالتالي فإن النتيجة $\frac{\partial Y_i}{\partial b}=X_i$

حيث أن $\frac{\partial b}{\partial b}=1$

الفصل الثالث

نموذج الانحدار الخطي المتعدد

The Multiple Regression Linear Model

دراستنا في الفصل الثاني العلاقة بين متغيرين إحداهما تابع والآخر مستقل إلا أن هـذه العلاقة في حد ذاتها علاقة بسيطة حيث كثيرا ما يصادف الباحث ظاهرة يعبر عنـها بمتغـير مستقل واحد وهي في الأصل ترتبط بأكثر من متغير مسـتقل. فمثـلا إذا أردنـا أن نـدرس العوامل التي تؤثر في إنتاجية الفدان من القمح (وهذا هو المتغير التابع) نجد أنـها قـد تكـون كمية السماد المستخدم (X_i) الطقس (W)، درجة خصوبة التربة (K) نوعية البذرة (F) ومـدى استخدام الميكنة في الزراع (M) هذا فضلا على أنه في حالة دراستنا السابقة لخط الانحـدار البسيط يمكن معرفة العلاقة بيم المتغير التابع والمتغير المستقل عن طريـق الرسـم وبالتـالي يمكن معرفة طريقة العلاقة بين المتغيرين أما في حالـة الانحـدار المتعـدد، فنظـرا لكـثرة المتغيرات المستقلة فإنه لا يمكن تمثيل هذه العلاقة بيانيا. في حالة الانحـدار المتعـدد سـوف نستخدم العلاقة الخطية أيضا حيث تعني العلاقة الخطية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة هو عدم اختلاف تأثير المتغيرات على المتغير التابع من مفردة في العينة إلى أخرى في نفـس العينة. فإذا كان لدينا دالة استهلاك كالتالي:

$$C_i = a + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2}$$

حيث أن C_i هو الاستهلاك، X_{i1} تعبر عن الدخل و X_{i2} تعـبر عـن الأذواق. ونفترض خطية العلاقة بين الدخل والاستهلاك وهذا يعني أن التغير في الدخل من فـرد إلـى فرد آخر يؤدي إلى تغيير ثابت في الاستهلاك ويقاس بالمعلمة b_1 ، كذلك تغير الأذواق بيـن مستهلكي هذه السلعة تعني أنه يؤدي إلى تغير ثابت أى تغير ثابت في الاسـتهلاك أي بمقـدار ثابت ويقاس بالمعلمة b_2 . يستنتج من هذا هو أن الخطية تعني أن أفراد العينة لهم تفضيـلات متماثلة، وتعالج هذه المشكلة بإدخال عنصر الخطأ العشوائي وتصبح الصورة الدالية كالتالي:

$$C_i = a + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \mu_i$$

بإدخال علامة $\sum$ والتربيع

$$\sum e_i^2 = \sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$ -٣

$$\therefore \sum e_i^2 = \sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}_i X_{i1} - \hat{b}_i \hat{Y}_{i2}\right)^2$$

حيث النتيجة المراد الوصول إليها أن

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_1} = \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_2} = 0$$

إذا المطلوب إيجاد التفاضل بالنسبة للمعاملات $\hat{b}_2$ $\hat{b}_1$ $\hat{a}$ نجد أن

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{a}} = -2\sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}_1 X_{i1} \hat{b}_2 X_{i2}\right) = 0$$ -٤

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_1} = -2X_{i1}\sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}_1 X_{i1} - \hat{b}_2 X_{i2}\right) = 0$$ -٥

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_2} = -2X_{i2}\sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}_1 X_{i1} - \hat{b}_2 X_{i2}\right) = 0$$ -٦

بقسمة المعادلة 4 على 2- وإدخال علامة $\sum$

$$\sum Y_i - n\hat{a} - \hat{b}_1 \sum X_{i1} - \hat{b}_2 \sum X_{i2} = 0$$ -٧

بقسمة المعادلة 7 على n

$$\therefore \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{n\hat{a}}{n} + \hat{b}_1 \frac{\sum X_{i1}}{n} + \hat{b}_2 \frac{\sum X_{i2}}{n}$$ -٨

$$\therefore \overline{Y} = \hat{a} - \hat{b}_1 \overline{X}_1 + \hat{b}_2 \overline{X}_2$$ -٩

بقسمة طرفي المعادلة رقم (5) على 2-

$$\therefore \sum X_{i1}Y_i - \hat{a}\sum X_{i1} - \hat{b}_1 \sum X_{i1}^2 - \hat{b}_2 \sum X_{i1}X_{i2} = 0 \qquad -١٠$$

إعادة صياغة المعادلة رقم (٧)

$$\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{b}_1 \sum X_{i1} - \hat{b}_2 \sum X_{i2} \qquad -١١$$

بضرب طرفي المعادلة (١١) في $\frac{\sum X_{i1}}{n}$

$$\therefore \frac{\sum X_{i1}Y_i}{n} = \hat{a}\sum X_{i1} - \frac{\hat{b}_1 \sum X_{i1}^2}{n} + \frac{\hat{b}_2 \sum X_{i1}X_{i2}}{n} \qquad -١٢$$

بطرح (١٢) من (١٠)

$$\sum X_{i1}Y_i - \frac{\sum X_{i1}\sum Y_i}{n} = \hat{a}(\sum X_{i1}\sum X_{i1}) + \hat{b}_1(\sum X_{i1}^2 - \frac{\sum X_{i1}^2}{n})$$
$$+ \hat{b}_2\left(\sum X_{i1}\sum X_{i2} - \frac{\sum X_{i1}\sum X_{i2}}{n}\right) \qquad -١٣$$

$$\therefore \sum x_i y_i = \hat{b}_1 \sum x_i^2 + \hat{b}_2 \sum x_{i1}x_{i2} \qquad -١٤$$

وبنفس الطريقة السابقة تضيرب المعادلة رقم (7)في $\frac{\sum X_{i2}}{n}$ تحصل على

$$\sum x_{i2}y_i = \hat{b}_1 \sum x_{i1}x_{i2} + \hat{b}_2 x_{i2}^2.$$

ويمكن الحصول على $\hat{b}_1$ ، $\hat{b}_2$ عن طريق المصفوفات والمحـــددات وذلـــك باستخدام الصورة التالية : $Ax = d$

$$\begin{bmatrix} \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum x_{i2} y_i \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية لإيجاد معلمات النموذج الخطي المتعدد $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$

نفترض أن لدينا النموذج المقدر التالي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} \qquad (١)$$

باستخدام التعاريف التالية

$$y_i = Y_1 - \overline{Y}$$

$$\hat{y}_i = \hat{Y}_1 - \overline{Y}$$

$$\overline{X}_i = \frac{\sum X_{i1}}{n}$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_{i2}}{n}$$

$$\chi_{i1} = X_{i1} - \overline{X}_i$$

$$\chi_{i2} = X_{i2} - \overline{X}_2$$

بإدخال علامة الجمع والقسمة على المعادلة رقم (١).

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{n\hat{\beta}_0}{n} + \frac{\hat{\beta}_1 \sum X_{i1}}{n} + \frac{\hat{\beta}_2 \sum X_{i2}}{n} \qquad (٢)$$

$$\overline{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 + \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 \qquad (٣)$$

بطرح (٣) من (١)

$$\hat{Y}_1 - \overline{Y} = \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (X_{i1} - \overline{X}_1) + \hat{\beta}_1 (X_{i2} - \overline{X}_2) \qquad (٤)$$

$$\hat{y}_1 = \hat{\beta}_1 \chi_{i1} + \hat{\beta}_2 \chi_{i2}$$

$$e_i = (y_i - \hat{y}_i) = y_i - (\hat{\beta}_1 \chi_{i1} + \hat{\beta}_2 \chi_{i2}) \qquad (٥)$$

$$\sum e_i = \sum [y_i - (\hat{\beta}_1 \chi_{i1} + \hat{\beta}_2 \chi_{i2})]^2 \qquad (٦)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \beta_1} = 2 \sum (y_i - \hat{\beta}_1 \chi_{i1} - \hat{\beta}_2 \chi_{i2})(-\chi_{i1}) = 0 \qquad (٧)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \beta_2} = 2 \sum (y_i - \hat{\beta}_1 \chi_{i1} - \hat{\beta}_2 \chi_{i2})(-\chi_{i2}) = 0 \qquad (٨)$$

بقسمة معادلة (٧)، معادلة (٨) على 2 وإعادة ترتيب هاتين المعادلتين

$$\sum y_i \chi_{i1} = \hat{\beta}_1 \sum \chi_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum \chi_{i1} \chi_{i2}$$

$$\sum y_i \chi_{i2} = \hat{\beta}_1 \sum \chi_{i1} \chi_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum \chi_{i2}^2$$

باستخدام كريمر لحل المعادلتين والنتيجة هي نفسها نتيجة الطريقة الأولى.

باستخدام طريقة Cramer's rule

$$\therefore |\Delta| = \left(\sum x_{i1}^2\right)\left(\sum x_{i2}^2\right) - \left(\sum x_{i1} x_{i2}\right)\left(\sum x_{i1} x_{i2}\right) = \sum x_{i1}^2 x_{i2}^2 - \left(\sum x_{i1} x_{i2}\right)^2$$

$$\therefore |\Delta B_1| = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_{i1} x_{i2} \\ \sum x_{i2} y_i & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix} = \sum x_i y_i \left(\sum x_{i2}^2\right) - \sum x_{i1} x_{i2} \sum x_{i2} y_i$$

$$\therefore \hat{b}_1 = \frac{|\Delta \hat{b}_1|}{|\Delta|} = \frac{\sum x_{i1} y_i \left(\sum x_{i2}^2\right) - \sum x_{i1} x_{i2} \sum x_{i2} y_i}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2 - \left(\sum x_{i1} \quad x_{i2}\right)^2}$$

وعلى الطالب إيجاد قيمة $\hat{b}_2$

$$\therefore |\Delta \hat{b}_2| = \begin{bmatrix} \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1} y_i \\ \sum x_{i1} \quad {}_{i2} & \sum x_{i2} y_i \end{bmatrix} = \sum x_{i1}^2 \sum x_{i2} y_i - \sum x_{i1} y_i \sum x_{i1} x_{i2}$$

$$\therefore \hat{b}_2 = \frac{|\Delta \hat{b}_2|}{[\Delta]} = \frac{\sum x_{i1}^2 \; \sum x_{i2} y_i - \sum x_{i1} y_i \sum x_{i1} x_{i2}}{\sum x_{i1}^2 x_{i2}^2 - \left(\sum x_{i1} \quad x_{i2}\right)^2}$$

معنى المعلمات الجزئية للانحدار المتعدد

(تفسير معلمات خط الانحدار المتعدد)

Interpretation of Multiple Regression Equation

حيث:

$b_{1.23}$: ~ تقيس القيمة المتوسطة Y_1 مع ثبات كل من X_{i3} , X_{i2} .

$b_{2.13}$: ~ تقيس التغير في Y_1 لكل وحدة تغير في X_{i2} مع ثبات X_{i3} .

$b_{3.21}$: ~ تقيس التغير في Y_1 لكل وحدة تغير في X_{i3} مع ثبات X_{i2} .

ويمكن تفسير ذلك عن طريق الثلاثة خطوات الآتية:

الخطوة الأولى:

$$Y_i = b_{1.23} + b_{3.21} X_{i3} + w_i$$

Regress Y_i on X_{i3} only

الخطوة الثانية:

أي Regress X_{i2} on X_{i3}

$$X_{i2} = b_{2.13} + b_{3.12} X_{i3} + v_i$$

v_i هي البواقي ومعناها أن هناك عوامل أخرى في المتغير التابع بخلاف الدخل.

الخطوة الثالثة:

Regress w_i on v_i

$$w_i = a_0 + a_1 v_i + z_i$$

حيث z_i هي البواقي أي أن هناك عوامل أخرى تؤثر على Y_i أي أن الانحدار يقيس صافي أو تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع أو مدى استجابة المتغير التابع للمتغير المستقل.

مثلا: لو أن الدخل زاد بمقدار وحدة فإن المعلمة تقيس مدى استجابة الاستهلاك للزيادة في الدخل بمقدار معين. وكذلك البواقي تتأثر بعوامل أخرى مثلا "استهلاك الملابس يعتمد على السعر، الجودة والدخل، فمثلا إذا كان حدث تغيير في الأذواق ضد سلعة ما فإن هذا ينتج عنه انخفاض الطلب على هذه السلعة مما ينتج عنه انخفاض في الأسعار، كما أن البواقي تعكس التغيرات المفاجئة أي أنها تأخذ في الحسبان العوامل غير المتوقعة وينطبق ذلك أكثر في حالة الزراعة والحروب والهزات الأرضية.

التقييم الإحصائي لمعنوية معلمات خط الانحدار المتعدد

إن هدف التقييم الإحصائي لمعنوية معلمات النموذج ينحصر في معرفة أن أي متغير من المتغيرات المستقلة له تأثير معنوي أو ذات أهمية بالنسبة للمتغير التابع أو العكس وبالتالي الوقوف على العوامل التي تؤثر في الاستهلاك (كمتغير تابع) أو الطلب على سلعة ما (متغير تابع). وهو يتلخص في التالي، إذا افترض أن النموذج المكون به متغير بن تفسيريين فقط فإننا نضع الفرض العدمي والفرض البديل كالتالي:

$H_o: \ \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ الفرض العدمي

$H_1: \ \beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ الفرض البديل

ولكي تقيم معلمات النموذج يجب معرفة تباين $\hat{b}_1$ في الانحدار الخطي المتعدد.

$$\text{var} \ \hat{b}_1 = \frac{\sigma u^2 \sum x_{i1}^2}{\left(\sum x_{i1}^2\right)\left(\sum x_{i2}^2\right) - \left(\sum x_{i1} \sum x_{i2}\right)^2}$$

أما في الانحدار الخطي البسيط $\text{var} \ \hat{b}_1 = \dfrac{\sigma u^2}{\sum x_i^2}$

$t = \dfrac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}}$ وهذه تسمى t المحسوبة

حيث $\sigma u^2 = \dfrac{\sum e_i^2}{n-2}$ في الانحدار الخطي البسيط

والصورة العامة (أي في حالة الانحدار الخطي المتعدد).

$$\sigma u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

حيث k تساوي عدد المعلمات التي تقدر في الانحدار

$$var \ \hat{b}_2 = \sigma u^2 \frac{\sum x_{i2}^2}{\left(\sum x_{12}^2\right)\left(\sum x_{13}^2\right) - \left(\sum x_{12} \sum x_{13}\right)^2}$$

تقارن T المحسوبة بـــ T الجدولية فإذا كانت قيمة T المحسوبة أكبر من قيمتها الجدولية لـــهذا المتغير نستنتج أن المتغير المستقل محل الاعتبار ذات أهمية بالنسبة للمتغير التابع أو إذا كـــان العكس فإننا نستنتج عدم أهمية هذا المتغير المستقل بالنسبة للمتغير التابع.

سؤال: اثبت أن $\hat{b}_1$ في الانحدار الخطي المتعدد تساوي $\hat{b}$ في الانحدار الخطي البسيط؟

$$\because \hat{b} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$ في الانحدار الخطي البسيط

$$\therefore \hat{b}_1 = \frac{\sum x_{i1} y_i \ \ \sum x_2^2 - \sum y_i x_2 - \sum x_1 x_{i2}}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 \sum x_2\right)^2}$$ في الانحدار الخطي المتعدد

حيث تساوي $\hat{b}_1$ في الانحدار المتعدد $\hat{b}$ في الانحدار البسيط؟ بفرض أن الترابط بين المتغيرات المستقلة X_{i2} , X_{i1} يساوي صفر

$$\therefore \hat{b} = \hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_j}{\left(\sum x_i^2\right)}$$

خواص تقديرات المربعات الصغرى العادية

Properties Of OLS Estimation

١- فى الانحدار ذو المتغيرات الثلاثة يمر السطح Surface بالمتوسطات الثلاثة: $\overline{Y},\overline{X}_1,\overline{X}_2$ وهى المعادلة:

$$\overline{Y}=\hat{a} + \hat{b}_1\overline{X}_1 + \hat{b}_2\overline{X}_2$$

٢- القيمة المتوسطة الحقيقية تساوى القيمة المتوسطة المقدرة ل $E(\hat{Y}_i)$ أى أنه مع تكرار أخذ العينة فإن القيمة المتوقعة للمتغير التابع تؤول إلى القيمة الحقيقية المتوسطة لنفس المتغير.

$$\overline{Y} = E(\hat{Y}_i)$$

ويتبع ذلك أن :

$$E(\Sigma e_i) = \overline{e} = 0$$

-٣

$$\Sigma_{ei}X_{i2} = \Sigma_{ei}X_{i3} = \Sigma_{ei}Y_i = 0$$

أى أنه ليس هناك علاقة بين البواقى (تقديرات الخطأ العشوائى) والمتغير التابع أو المستقل.

٤- أن توزيع المعاملات يتبع التوزيع الطبيعى :

$$b_{1.23}\ ,\ b_{2.13}\ ,\ b_{3.21}$$

وكذلك عنصر الخطأ العشوائى يتبع التوزيع الطبيعى :

$$\mu_i \sim N(0,\sigma^2_\mu)$$

معناها أن μ_i متوسطها = صفر مع ثبات التباين.

دالة كوب دوجلاس

Cobb Douglas Production Function

$$Y_i = AX_{i1}^{B_1}X_{i2}^{B_2}e^{\mu_i} \quad (1)$$

حيث أن X_{i1} العمل ، X_{i2} رأس المال أو أي متغـــير آخــر

وبإعادة صياغة المعادلة (١) بتغيير الرموز

$$Q = AL_{i1}^{B_1}k_{i2}^{B_2}e^{\mu_i}$$

X_{i2} : المدخلات من رأس المال.

$$\ln Q = A + B_1 \ln l_i + \beta_2 \ln k + \mu_i$$

$$e = 2.718$$

خواص دالة كوب دوجلاس

١- معلمات الدالة المقدرة تقيس $(\hat{B}_1 \quad \hat{B}_2)$ المرونات للناتج بالنسبة لكل من رأس المـــال والعمل. حيث العمل يقاس بعدد ساعات العمل أو عدد العمال ورأس المال يقاس بمـــدار رأس المال.

٢- مجموعة المعاملات يعطي $(B_1 \quad B_2)$ معلومات عن عائد الحجم Return to Scale وهو يمثل "مدى استجابة الناتج لأي نسبة تغير في المدخلات" معنى ذلك أن إذا كان

عائد ثابت فإن $B_1 + B_2 = 1$

عائد متزايد فإن $B_1 + B_2 > 1$

عائد متناقص فإن $B_1 + B_2 < 1$

أي أنه: إذا زاد العمل ورأس المال بمقدار وحدة فإن الناتج يزداد بنفس المقدار وهو مـــا يسمى "بالعائد الثابت".

وإذا زاد الإنتاج بمقدار أكبر من المقدار الذي تتزايد به عوامل الإنتاج فهذا يسمى "العائد المتزايد" وإذا زاد الإنتاج بمعدل أقل من معدل زيادة عوامل الإنتاج وهذا يسمى "العائد المتناقص".

مثال تطبيقي:

$$Ln\hat{y}_i = -3.3384 + 1.5LnX_{i2} + 0.5LnX_{i3}$$

S.D	(0.54)	(.102)
T المحسوبة	(2.78)	(4.801)

حيث أن: عنصر رأس المال X_{i2}

عنصر العمل X_{i3}

فسر الأرقام الموضحة بخط الانحدار

$D.F=12$ $R_2=0.88$

حيث أن DF هي درجات الحرية: Degree of freedom

الانحراف المعياري: S.D

الحل:

١- عائد الحجم

عائد الحجم = $B_1 + B_2$

أي أن هذه الصناعات ذات عائد متزايد $1.5 + 0.49 = 2 > 1$

أي إذا زادت المدخلات بوحدة واحدة فإن الناتج يزداد بأكثر من وحدة

حيث X_{i2} العمل X_{i3} رأس المال

أيضا تفسير معلمات الدالة كلا على حدة كالتالي :

٢- المرونات:

$$\text{مرونة العمل} = \frac{\partial Y_i}{\partial X_{i1}} \cdot \frac{X_{i1}}{Y_i} = 1.5$$

$$\text{مرونة رأس المال} = \frac{\partial Y_i}{\partial X_{i2}} \cdot \frac{X_{i2}}{Y_i} = 0.5$$

نلاحظ أن مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل قليلة أى أن الإنتاج عديم المرونة بالنسبة لعنصر العمل.

أى إذا زادت الوحدات الخاصة بالعمل بمقدار وحدة واحدة فإن كمية الإنتاج تزداد بأقل من الوحدة.

وهذه الصناعات مرتفعة المرونة بالنسبة لرأس المال.

أى أنه إذا زاد عنصر رأس المال بمقدار وحدة واحدة فإن كمية الإنتاج تزداد بمقدار واحد ونصف فى المائة.

الأهمية بالنسبة لكل من عنصرى العمل ورأس المال (المعنوية الإحصائية):

تشير الأهمية النسبية لعناصر الإنتاج لكل من عنصرى العمل ورأس المال إلى مدى أهمية كل عنصر من عناصر الإنتاج فى الكمية المنتجة وتقاس من خلال اختبار T.

أ- بالنسبة للعمل:لو كشفنا فى الجداول عن T الجدولية عند درجات الحرية، ثم نقارن T الجدولية مع T المحسوبة.

∴معنوية العمل المحسوبة (2.78) > 2

أى أن :العمل ذو معنوية إحصائية بالنسبة للكمية المنتجة.

ب- بالنسبة لرأس المال ∴ T المحسوبة = 4.8005

أى أن رأس المال ذو معنوية إحصائية مرتفعة بالنسبة للكمية المنتجة.

٤- عدد المشاهدات (أي مشاهدات العينة)

مشاهدة $n = 12 + 3 = 15$ عدد المشاهدات

٥- R^2 توضح أهمية المتغيرات المستقلة ككل بالنسبة للمتغير التابع.

$R^2 = 88$ ∴ قدرة رأس المال والعمل على تفسير التغيير في المتغير التابع (الناتج) عالية أي أن أهمية رأس المال والعمل كبير في تفسير التغير في الإنتاج.

العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل الانحدار

$$\sum Y_i^2 = \sum \hat{Y}_i^2 + \sum e_i^2$$

وبقسمة الطرفين على $\sum Y_i^2$

$$1 = \frac{\sum \hat{Y}_i^2}{\sum Y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum Y_i^2}$$

$$\therefore \quad R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum Y_i^2}$$

بالتعويض عن $\hat{y}_i = \hat{b}x_i$

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum (\hat{b}\chi_i)^2}{\sum y_i^2}$$

في حالة الانحدار البسيط $r^2 = R^2$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum \chi_i y_i}{\sum \chi_i^2}$$

$$\therefore r_{y.x}^2 = \left[\frac{\sum \chi_i y_i}{\sum \chi_i^2}\right]^2 \frac{\sum \chi_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$\therefore r_{y.x}^2 = \frac{\left(\sum \chi_i y_i\right)^2}{\left(\sum \chi_i^2\right)^2} \cdot \frac{\sum \chi_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$\therefore r_{y.x}^2 = \frac{\left(\sum \chi_i y_i\right)^2}{\left(\sum \chi_i^2 \sum y_i^2\right)^2}$$

ثم نقسم ونضرب في نفس الوقت:

المقام = ... $n\left(\frac{\sum \chi_i^2}{n} \cdot \frac{\sum y_i^2}{n}\right)$

$$\therefore r_{y.x}^2 = \frac{\left(\sum \chi_i y_i\right)^2}{\frac{n^2 \sum \chi_i^2}{n} \frac{n^2 \sum y_i^2}{n}}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\therefore r_{y.x}^2 = \frac{\sum \chi_i y_i}{n^2 \sqrt{\frac{\sum \chi_i^2}{n}} \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}}$$

$$= \frac{\sum \chi_i y_i}{n S_x S_y}$$

$$\therefore r_{y.x}^2 = \frac{\sum \chi_i y_i}{n S_x S_y}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum \chi_i^2}{n}} \qquad S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}$$

التعبير عن $\hat{b}_1$ بواسطة معاملات الارتباط الجزئي

وإذا افترضنا أن المعادلات القادمة معطيات لكي:

$$r_{yiyi} = \frac{S_{yi}^2}{ns_y^2} \rightarrow \therefore \sum y_i^2 = nsy^2 \quad ry_i y_i^{=1}$$

$$r_{1yi} = \frac{\sum \chi_{i1} y_i}{ns_1 s_y} \rightarrow \therefore \sum \chi_i y_i = nr_{1y} s_1 s_y$$

$$r_{1yi} = \frac{\sum \chi_{i1} y_i}{ns_1 s_y} \rightarrow \therefore \sum \chi_i y_i = nr_{1y} s_1 s_y$$

$$r_{2yi} = \frac{\sum \chi_{i2} y_i}{ns_1 s_y} \rightarrow \therefore \sum \chi_{i2} y_i = nr_{2yi} s_2 s_y$$

$$r_{1.2} = \frac{\sum \chi_{i1} \chi_{i2}}{ns_1 s_y} \rightarrow \therefore \sum \chi_{i1} y_{i2} = nr_{12} s_1 s_2$$

$$r_{22} = \frac{\sum \chi_{i2}^2}{ns_2^2} \rightarrow \therefore \sum \chi_{i2}^2 = nr_{22} s_2^2$$

إن التعبير عن إيجاد قيمة $\hat{b}_1$ تعبر عن صافي العلاقـــة بيـــن المتغـــير المســـتقل والمتغير التابع.

فإذا كانت $\hat{b}_1$ هي

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum \chi_{i2} y_i (\sum \chi_{i1}) - \sum \chi_1 \chi_2 (\sum \chi_{i2} y_i)}{(\sum \chi_{i1} \sum \chi_{i2}) - (\sum \chi_{i1} \sum \chi_{i2})^2}$$

باستخدام تعريفات الترابط الجزئي

$$\hat{b}_1 = \frac{nr_{iy} s_i s_y (ns_2^2) - (nr_{12} s_1 s_2 (nr_{2y} s_2 s_y)}{(ns_1^2)(ns_2^2) - (ns_{12} s_1 s_2)^2}$$

وبأخذ عوامل مشتركة

$$\therefore \hat{b}_1 = \frac{n^2 s_2^2 s_1 [r_{iy} - r_{12} r_{2y}] S_y}{n_2 s_2^2 s_1 [1 - r_{12}^2] s_1}$$

$$\therefore \hat{b}_1 = \frac{[r_{iy} - r_{12}r_{2y}]}{[1 - r_{12}^2]}\left[\frac{S_y}{S_1}\right]$$

وبالتالي نجد أن $\hat{b}_1$ تشرح صافي العلاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع مع افتراض ثبات العوامل الأخرى وبالتالي فإن هذه العلاقة (r_{iy} أي الترابط) بين المتغير الأول والتغير التابع مطروحا منها العلاقات بين المتغيرات المستقلة الأخرى.

اختبار المعنوية الإحصائية لمعلمات النموذج ككل (F)

سوف نستعرض هذا الجزء في شكل أسئلة والإجابة عليها.

س١: اذكري الفرض العدمي والفرض البديل لاختبار المعنوية الإحصائية للانحدار ككل؟

جـ١: يشير اختبار المعنوية الإجمالية إلى أن المتغيرات المستقلة ككل لا تساعد على تفسير التغير في المتغير التابع حول وسطه.

أي أن:

الفرض العدمي $H_0 : b_1 = b_2 = b_2 = \quad \ldots = b_n = 0$

أي أن الفرض العدمي يشير إلى أن كل المعلومات في وقت واحد تساوي صفر

الفرض البديل: ليس كل قيم المعلمات تساوي صفر.

س٢: كيف تختبر المعنوية الكلية للانحدار؟

جـ٢: تختبر المعنوية الكلية للانحدار بحساب F (ثم بمقارنتها بـ F الجدولية).

س٣: ما سبب هذا الاختيار ومنطقيته؟

جـ٣: (F) هي عبارة عن النسبة بين التباين المفسر والتباين غير المفسر وتدل القيمة المرتفعة لـ F المحسوبة بعلاقة ذات معنوية إحصائية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة مؤدية إلى رفض الفرض العدمي بأن معاملات كل المتغيرات المفسرة كلها ليست أصفار.

س٤: اذكري صيغة التباين المفسر والتباين غير المفسر (تباين البواقي)؟

جـ٤: التباين المفسر عبارة عن $\frac{\sum \hat{y}_i^2}{k-1} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i^2 - \overline{Y}_i\right)^2}{K-1}$

حيث K هي عدد المتغيرات المستقلة بما فيها المقطع والواحد يدل على الجزء الثابت a

أما التباين غير المفسر فهو

$$\frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{n-k}$$

توزيع F :

أ- (F) في الانحدار البسيط عبارة عن

$$F_{1,n-2} = \frac{\sum y_i^2 / 1}{\sum e_i^2 / n-2}$$

ب- (F) في الانحدار المتعدد

$$F_{k-1,n-k} = \frac{\sum y_i^2 / k-1}{\sum e_i^2 / n-k}$$

ملحوظة:

من الممكن أن تكون F ذات معنوية إحصائية وليس بين المعلمات المحسوبة ما هو معنوي إحصائيا. وقد يحدث هذا عندما يكون هناك ارتباط مرتفع بين المتغيرات المستقلة بعضها ببعض.

وهناك علاقة بين F المحسوبة و R^2 وهي كالتالي بقسمة طرفي المعادلة رقم (١) على $\sum y_i^2$

$$F = \frac{\sum y_i^2 / k-1}{\sum e_i^2 / n-k} \qquad (١)$$

$$F = \frac{\dfrac{\sum y_i^2/(k-1)}{\sum y_i^2}}{\dfrac{\sum e_i^2/(n-k)}{\sum y_i^2}} \tag{٢}$$

$$\frac{\left(\sum y_i^2\right)}{\sum e_i^2} - = R^2 \qquad \frac{\left(\sum e_i^2\right)}{\left(\sum y_i^2\right)} = 1 - R^2$$

إذن بالتعويض في معادلة رقم (٢)

$$F = \frac{R^2/k-1}{\left(1-R^2\right)/(n-k)}$$

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1}$$

قياس القدرة التفسيرية للمتغيرات في النموذج المتعدد "معاملات الارتباط الجزئي"

تقيس معاملات الارتباط الجزئي صافي الارتباط بين المتغير التابع ومتغير مستقل واحد بعد حذف التأثير المشترك أي بمعنى ثبات المتغيرات الأخرى في النموذج

فمثلا $r_{xi1y} . x_{i2}$ عبارة عن الارتباط بين المتغير التابع والمتغير الأول المستقل مع ثبات X_{i2}.

س١: كيف يمكن إبعاد تأثير X_{i2} عن كل من x_{i1} , Y_i عند إيجاد قيمة $r_{xi1y} . x_{i2}$ ؟

س٢: ما هو المدى لقيم معاملات الارتباط الجزئي؟

س٣: ما هي إشارة معاملات الارتباط الجزئي؟

س٤: ما فائدة معاملات الارتباط الجزئي؟

س١: كيف يمكن إبعاد تأثير X_{i2} عن كل من X_{i1} , Y_i عند إيجاد قيمة $r_{xi1y} . x_{i2}$ ؟

جـ١: لإبعاد تأثير X_{i2} على Y_i فإننا نوجد انحدار Y_i على X_{i2} ونوجد البواقي e_1 ولإبعاد تأثير على x_{i1} فإننا نوجد انحدار X_{i1} على X_{i2} ونوجد البواقي وهي e_1 . e_2 تمثلان التغير في X_1 , Y_1 على الترتيب والبواقي بدون تفسير بعد إزاحة تأثير X_{i2} على كل

من X_{i1}, Y_i وبالتالي فمعامل الارتباط الجزئي ليس إلا معامل ارتباط بسيط بين البواقي.

س٢ : ما هو المدى لقيم معاملات الارتباط؟

ج ٢: المدى بين 1-,1

س٣: ما هي إشارة معاملات الارتباط الجزئي؟

ج ٣: إشارة معاملات الارتباط الجزئي هي نفس إشارة المعلمة (المقدرة المناظرة).

س٤: ما فائدة معاملات الارتباط الجزئي؟

ج ٤: تستخدم معاملات الارتباط الجزئي في تحليل الانحدار المتعدد لتحديد الأهمية النسبية لكل متغير في النموذج،والمتغير المستقل صاحب أعلى معامل ارتباط جزئي مع المتغير التابع يساهم أكثر من المتغيرات الأخرى في القدرة التفسيرية للنموذج وبالتالي يقيس معامل الارتباط الجزئي صافى الارتباط بين المتغير التابع والمتغير المستقل بعد حذف التأثير المشترك . وصورته:

الارتباط بين X_{i1}, Y_i :

$$r_{1y.2} = \frac{r_{1y} - r_{1y}\ r_{12}}{\sqrt{1 - r^2_{12}}\ \sqrt{1 - r^2_{2y}}}$$

الارتباط بين X_{i2}, Y_i :

$$r_{2y.1} = \frac{r_{2y} - r_{2y}\ r_{12}}{\sqrt{1 - r^2_{12}}\ \sqrt{1 - r^2_{1y}}}$$

أمثلة محلولة

مثال رقم ١:

افترض أن لديك بيانات عن الإنفاق الاستهلاكي الشخصي والدخل المتابع والسنوات التي أنفق فيها الدخل كالتالي

الإنفاق الاستهلاكي (المتغير التابع)	الدخل الشخصي المتابع	الفترة الزمنية
٢٨١,٣	٣٠٩,٣	١٩٥٦
٢٨٨,١	٣١٦,١	١٩٥٧
٢٩٠,٠	٣١٨,٨	١٩٥٨
٣٠٧,٣	٣٣٣,٠	١٩٥٩
٣١٦,١	٣٤٠,٣	١٩٦٠
٣٢٢,٥	٣٥٠,٥	١٩٦١
٣٣٨,٤	٣٦٧,٢	١٩٦٢
٣٥٣,٣	٣٨١,٢	١٩٦٣
٣٧٣,٧	٤٠٨,١	١٩٦٤
٣٩٧,٣	٤٣٤,٨	١٩٦٥
٤١٨,١	٤٥٨,٩	١٩٦٦
٤٣٥,١	٤٧٧,٥	١٩٦٧
٤٥٢,٧	٤٩٩,٠	١٩٦٨
٤٦٩,١	٥١٣,٥	١٩٦٩
٤٧٩,٩	٥٣٣,٢	١٩٧٠

وكان النموذج المقدر من هذه البيانات كالتالي:

$$\hat{Y}_i = 53.16 + 0.74X_{i1} + 2.74X_{i2}$$

$$t = (4.0881) \quad (14.9060) \quad (3.225)$$

$$D.f = 12 \qquad R^2 = 0.9988 \qquad \bar{R}^2 = 0.9986$$

وتفسير هذه النتائج كالتالي:

إذا كان كلا من X_{i2} , X_{i1} يساوي الصفر فإن متوســـط الإنفـــاق الشـــخصي علـــى الاستهلاك هو ٥٣,١٦ تقريبا وهذا هو المقطع، إلا أنه في كثير من الحالات نجد أن المقطـــع ليس له معنى اقتصادي. وقيمة المعلمة الجزئية للمتغير X_{i1} هو ٧٣ تقريبا وهذا يعني أنـــه إذا بقيت العوامل الأخرى على حالها (أي ثابتة) فإذا زاد الدخل الشخصي بمقدار ريال واحد فـإن متوسط الإنفاق الاستهلاكي يزداد بمقدار ٧٣, هلله. وبنفس الطريقـــة إذا الدخـــل ثـــابت فـــإن متوسط الإنفاق الاستهلاكي تقدر بأنه يزداد بمقدار ٢,٧ ريال كل سنة. أما عن R^2 فإنه يظـــهر أن المتغير بين المفسرين يشرحان حوالي ٩٩,٩ في المائة من التغيرات في الإنفاق الاســـتهلاك الشخصي.

أما بالنسبة لمعامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ فإنه يظهر أنه بعد الأخذ في الاعتبار كلا مـــن X_{i2} , X_{i1} فإن ذلك يشرح ٩٩,٨ في المائة من التغير في المتغير التابع.

مثال رقم: ٢

إذا أرادمنتج أن يسوق منتجه في سوقين (التمييز السعري) لتعظيم إيراداته الكلية فإنه يمكن صياغة النموذج بطريقة مبسطة كالتالي:

الإيراد في السوق الأول $R_1 = P_1q_1$ والإيراد في السوق الثاني $R_2 = P_2q_2$

حيث أن P_2, P_1 الأسعار في السوق الأول والسوق الثاني، q_2, q_1 الكميات المباعة فـــي السوق الأول والسوق الثاني، R_2, R_1 هو الإيراد في السوق الأول والسوق الثاني وبالتـــالي نجد أن دالة الإيراد الكلي كالتالي وذلك في صورة قياسية.

$$R = \beta_0 + \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \mu_i$$

فإذا كانت المعادلات الطبيعية لهذا النموذج كالتالي

$$\sum y_i \chi_{i1} = \hat{\beta}_1 \sum \chi_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum \chi_{i1}\chi_{i2}$$

$$2.428 = 7.55\hat{\beta}_1 + 3.7.1\hat{\beta}_2$$

$$\sum y_i\chi_{i2} = \hat{\beta}_1 \sum \chi_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum \chi_{i2}^2$$
$$3939.08 = 1335.7\hat{\beta}_1 + 7.551\hat{\beta}_2$$

حيث أن X_{i1} هي R_{i1} ، X_{i2} هي X_{i2} ، R_i هي Y_1

ويمكن إيجاد قيمة المعلمتين بحل المعادلات الآتية كما سبق في المثال النظري كالتالي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 7.55 & 3.71 \\ 1335.7 & 7.55 \end{vmatrix} = 4893.92$$

$$|\Delta\hat{\beta}_1| = \begin{vmatrix} 2.428 & 3.71 \\ 3939.1 & 7.55 \end{vmatrix} = 14718.9$$

$$|\Delta\hat{\beta}_2| = \begin{vmatrix} 7.55 & 2.428 \\ 1335.7 & 3939.1 \end{vmatrix} = 3298.11$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|\Delta\hat{\beta}_1|}{|\Delta|} = 2.99$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{|\Delta\hat{\beta}_2|}{|\Delta|} = 6.74$$

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_1\overline{X}_1 + \hat{\beta}_2\overline{X}_2$$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج المقدر كالتالي:

$$\overline{Y}_i = -104.94 + 2.99X_{i1} + 6.74X_{i2}$$

أسئلة عامة على الانحدار الخطي المتعدد

تمارين على الانحدار الخطي المتعدد

١- إذا علمت أن دالة الإنتاج لصناعة معينة تأخذ الشكل التالي:

$$Q_i = \beta_0 L_i^{\beta_1} \quad K_i^{\beta_2} e_i^{\mu_i}$$

وأن البيانات التالية تمثل المدخلات من عنصر العمل وعنصر رأس المال **كالتالي:**

(الإنتاج) Q_i	(العمل) L_i	(رأس المال) K_i
600	20	30
650	50	45
700	110	200
850	150	300
950	200	500
1053	210	550
1250	293	600

المطلوب:

إيجاد تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى **العادية مع شرح** النتائج والتعليق على هذه وذكر تعريف كل نتيجة.

$$\bar{R}^2, R^2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, t, F$$

وذلك باستخدام Spss أو أي برنامج آخر SAS

٢-

	Y_i	X_{i1}	X_{i2}
1960	16	15	3.5
1961	13	20	4.3
1962	10	30	4
1963	7	42	7.6
1964	7	50	7
1965	5	54	9
1966	4	65	8
1967	3	72	10
1968	3.5	85	12
1969	2	90	14

١- أوجدي معلمات النموذج بطريقة OLS.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \mu_i$$

٢- المعنوية الإحصائية لمعلومات النموذج

٣- المعنوية الإحصائية للنموذج ككل.

٣- إذا أعطيت البينات التالية لحساب $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$

$$\sum Y_i = 733 \quad \sum Y_{i1}^2 = 48,139 \quad \sum YX_{i1} = 40,830$$

$$\sum Y_{i1} = 643 \quad \sum Y_{i1}^2 = 34,843 \quad \sum YX_{i2} = 6,736$$

$$\sum Y_{i2} = 106 \quad \sum X_{i2}^2 = 967 \quad \sum X_{i1}X_{i2} = 5,779$$

أوجدي $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$

$R^2, \overline{R}^2$

خطوات تنفيذ تقدير هذا النموذج باستخدام SPSS

أنت تعرفين أن هذا النموذج يجب أن يحول إلي داله خطية باستخدام اللوغاريتمات.

$$LnQ_i = \beta_0 + \beta_1 LnL_i + \beta_2 LnK_i + \mu_i$$

وبالتالي يجب تحويل البيانات أولا.

Computing values:

LnQ_i

1- click Transform, Then click Compute

2- click Target variable

أي اجعلي وميض الفأرة عند هذا ثم اكتبي اسم المتغير الجديد وليكن WW أو QQ

3- Ln (numexph) في نفس الشباك أفردي القائمة علي

واعملي click

ظللي المنطقة ثم اذهب إلي Function واعملي click ثم ظللي المتغير المـــراد حساب (LnQ) قيمته وعند اعملي clickلتنقلي هذا المتغير إلي القوس وبالتـــالي يصبـــح الشكل (Q) Ln كرري نفس هذه الخطوات مع L,k مع إعطاء مسميات جديـــدة للمتغـيرات المحسوبة أي أن Lnk=kk, Ln L=LL ثم بعد ذلك نفذي الخطوات السابقة التي شرحت لــك لعمل تقدير معلمات النموذج حيث أصبح المتغير التابع الآن هـو QQ والمتغـير المســتقبلة .KK,LL

$$\hat{Q}Q = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(LL) + \hat{\beta}_2(kk)$$

أي أن النموذج المقدر سوف يكون

هذا يقابل النموذج

$$Ln\hat{Q}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Ln(L) + \hat{\beta}_2 Ln(k)$$

٤ – الجدول الآتي يمثل كمية الإنتاج من منشآت نسيجية حيث نأخذ دالة الإنتاج تأخذ الشـــكل التالي

$$Q_i = \beta_0 L_i^{B_1} k_i^{B_2} e^{\mu_1}$$

الشركة:	الإنتاج (Q)	العمل (L_I)	رأس المال (k_I)
1	60	1200	2000
2	150	1000	5000
3	190	1420	4500
4	200	1500	5100
5	210	1520	5900
6	620	1620	9000
7	380	1800	6200
8	420	1820	7100
9	444	1800	6130
10	510	1750	8512
11	600	1950	9020
12	650	1940	9800
13	440	1810	900
14	315	1520	8000
15	270	1222	7000

أوجدي تقديرات المعلمات باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية وفسري النتـــائج التي تحصلي عليها من حيث :

أ- عائد الحجم ونوع الصناعة

ب- المرونة

الحـــل

خطوات تنفيذ هذا البرنامج

Computing Values

In output

1- Click Transform, Then click compute

2- Click عندTarget variable

أي اجعل وميض الفأرة عند هذا ثم اكتبي اسم المتغير الجديد وليكن QQQ

3- في نفس الشباك

أفردي القائمة حتى تعثري علي Ln (numexpr) ثم أعملي click

ظللي المنطقة ثم اذهب إلي Function وأعملي click ثم ظللي المتغير المراد حساب قيمته وعند وأعلي click لتنقلي هذا المتغير إلي القوس Ln (capital)

النتائج

$R^2 = .127$ $\bar{R}^2 = -.018$ $S = .6489$

تحليل التباين

RSS =	.737	2	
ESS=	5.053	12	F=.875
TSS=	5.790	14	Sig .442

$Ln\hat{Q} = 4.589+5.320LnL+7.657\ LnK$

(t) (5.169) (.744) (1.116)

٥- إذا أعطيت المعلومات التالية عن دالة ما كالتالي:

$10 = 12\hat{B}_1 + 5\hat{B}_2$ $\overline{X}_1 = 5$ $\overline{X}_2 = 10$

$30 = 15\hat{B}_1 + 10\hat{B}_2$ $\overline{Y} = 7$

المطلوب:

١- اوجدى تقدير معلمات النموذج – ثم ضعي النموذج في صورته التقديرية.

٢- ما نوع هذه الدالة – هل هي دالة طلب ، أوعرض

اذكرى أسباب ذلك من الناحية الاقتصادية

(*الحل:* من الممكن أن تكون دالة الطلب على النقود حيث X_{i1} سعر الفائدة ، أو دالة الطلب بصفة عامة ، أو من الممكن أن تكون دالة عرض حيث تمثل X_{i1} التكاليف الإنتاجية، X_{i2} تمثل السعر)

٣- اوجدى مرونات X_{i1} ، X_{i2} وفسري النتائج.

كيفية إدخال البيانات السلسلية

إذا كانت البيانات سلسلية كالدخل القومي مثلا مسجلة بالربع سنوية فإننا ندخل هذه البيانات كالتالي:

١- افتح الكمبيوتر وعند Program Click SPSS 7.5 ،يظهر لك جدول فظللي Variable Name.

٢- اكتب مثلاSSS ثم Click Ok يظهر لك مربع البيانات أو جدول البيانات ومدون بها اسم المتغير الذي اخترته وهو SSS.

٣- أدخل كل رقم من أرقام الدخل القومي وبعد ذلك اضغط Enter وهذا حتى تنتهي من البيانات (طبعا تذكر أن تكتب بيانات ربع سنوية مثلا من 1993 إلى 1999 وبالتالي سوف يكون عندك عدد مشاهدات $9\times4=36$)

٤- اذهب إلى Click Data/Click define dates .

٥- افرد القائمة يظهر لك جدول به عدة اختيارات ما بين (السنة)و(الربع سنة) و(السنة والشهر) وهكذا اختار Year Quarters بعد أن تنزل القائمة عن طريق العلامة وظللي Year Quarters ثم اذهبي في نفس الجدول إلى Year وصلح السنة واكتب 1993 ثم Click Ok يظهر رسالة تقول:

The following new variables are being created

Name	Label
Year	Year, not periodic
Quarter	Quarter, period 4
Data	Data Formate "QQYYY"

٦-اذهب إلى File Click close

يظهر جدول يسألك Save contents of output

YES	No	Cancel

٧- Click No يظهر لك جدول البيانات وبه المتغيرات والمتغير قد رتب حسب الربع سنوية تحت date أي يظهر لك ثلاث متغيرات أخرى .

يمكن إجراء أي عمليات تربوية على هذه السلسلة للمتغير الدخل القومي مثلا.

Good Luck

الفصل الرابع

مشكلات أساسية في نموذج الانحدار الخطي (المتعدد)

المشكلة الأولى: مشكلة اختلاف التباين (Heteroscedasticity)

معنى اختلاف التباين وطبيعة المشكلة:

من أحد الفروض المبنى عليها تقديرات المربعات الصغرى هو أن التبـــاين ثـــابت أي ثبات التباين من مفردة إلى أخرى في العينة، إن وجود هذا الاختلاف في التباين يمثل:

$$E(\mu_i)^2 = \sigma_i^2$$

أي الخطأ العشوائي مرتبط بالمشاهدات في العينة (X_i)

أي أن

$$E(\mu_i)^2 = \sigma_1^2$$

$$E(\mu_2)^2 = \sigma_2^2$$

$$E(\mu_3)^2 = \sigma_3^2$$

هناك عدة أسباب لوجود اختلاف التباين أو عدم ثباته كما افترضتها النظرية التقليديـــة للمربعات الصغرى.

١- أن الأشخاص يتبعون نموذج التعلم من الأخطاء وبالتالي نجد أن التبـــاين يميـــل إلـــى التناقص كلما تكررت التجربة.

٢- حينما يزداد الدخل فإن الأشخاص يتغير توزيع دخلهم على مختلف الأشـــياء بطريقـــة مختلفة.

٣- حينما تتحسن طريقة جمع البيانات فإن التباين يميل إلى أن يكون صغير، وبالتالي فـــإن اختلاف التباين يدل على أن تباين الخطأ العشوائي غير ثابت عنـــد كـــل قيـــم إحـــدى المتغيرات المستقلة

أي أن

$$E(X_{i1}\mu_i) \neq 0$$

$$E(X_{i2}\mu_i) \neq 0$$

مثال على اختلاف التباين:

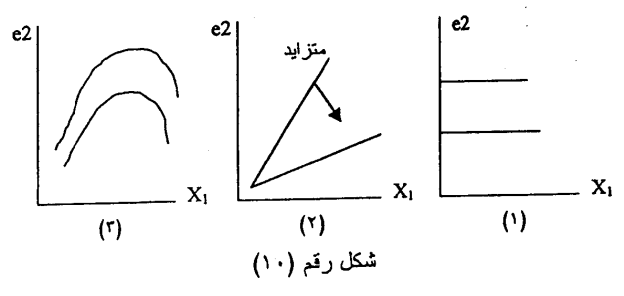
تباين الخطأ العشوائي الخاص بالإنفاق لعائلات الدخل المنخفض عادة يكـــون أصغـــر منه بالنسبة لعائلات الدخل المرتفع لأن معظم الأسر ذات الدخل المنخفض يكون إنفاقها علـــى الضروريات مما يترك مجالا صغيرا لحرية الاختيار، كذلك نجد أن هنـــاك بعـــض المنـــاطق يتركز بها عدد كبير من الصناعات عن مناطق أخرى، هذا في حالة حريـــة اختيـــار موقـــع المصنع.

الطرق المستخدمة لاختبار وجود اختلاف التباين:

هناك طرق متعددة لاختبار وجود التباين منها:

أولا: طريقة الرسم التمثيلي:

إن الرسم التمثيلي من أحد الوسائل لاكتشاف أن التباين ثابت أو أنه غير ثـــابت هـــذا بالإضافة إلى أن هناك فائدة أخرى لهذا الرسم هو أنه إذا استخدم مع أي اختبار "جولـــد فيلـــد" فإنه يوضح نوع العلاقة أو الترابط بين الخطأ العشوائي وبين المتغيرات المستقلة.



شكل رقم (١٠)

ويمثل شكل رقم (١) طبيعة التباين وهو في هذه الحالة ثابت وهو المرغوب فيـــه أمـــا شكل رقم (٢) يوضح أن هناك علاقة طردية بين مربع الخطأ والمتغير المستقل والشكل رقـــم (٣) يوضح أن هناك مشكلة في البيانات المتعلقة بالمتغير المستقل محل الدراسة.

ثانيا: طريقة "جولد فيلد كوانت":

ويتم هذا الاختبار كالتالي (الخطوات):

١- ترتيب البيانات تنازليا أو تصاعديا طبقا للمتغير الذي بـــه هـــذه المشـــكلة (المتغـــير المستقل).

٢- **إجراء انحدارين منفصلين: الانحدار الأول: للقيم "الصغرى". والانحدار الثاني، للقيـــم الكبرى مع حذف المشاهدات الوسطى. أي تقسم العينة إلى ثلاثـــة مجموعـــات بعـــد ترتيبها تنازليا أو تصاعديا، المجموعة الأولى المشاهدات تمثل المجموعـــة ذات القيـــم الصغرى والمجموعة الثانية تمثل المجموعة ذات القيم الوسيطة وهي التي تحذف عنـــد إجراء الاختبار فقط، والمجموعة الثالثة وهي تمثل المشاهدات ذات القيم الكبرى.**

٣- تقدر F كالتالي:

أ- يقدر مجموع مربع الخطأ العشوائي للقيم الكبرى (Ess_2) من خـــط الانحـــدار للقيم الكبرى للمتغير المستقل، ويقدر مجموع مربع الخطـــأ العشـــوائي للقيـــم الصغرى (Ess_1) من خط الانحدار المبنى على القيم الصغرى.

ب- تحسب F

$$F = \frac{Ess_2}{Ess_1}$$

جـ- تقارن F المحسوبة و F الجدولية بدرجات الحرية $(n-d-2k)/2$

حيث: n **هي عدد المشاهدات**

d عدد المشاهدات المحذوفة الوسطى ويعتمد هذا العدد على اختيـــار الباحث

k هي عدد معلمات الدالة المقدرة أي عدد المتغيرات شاملة الجـــزء الثابت (المقطع).

لماذا يمثل وجود اختلاف التباين مشكلة؟ وما هي خطورة هذه المشكلة؟

أولا: إن وجود هذه المشكلة لا يؤثر على التقدير الغير متحيز لمعلمات الدالة أي يظل هذا الفرض صحيح ولا يتأثر بوجود اختلاف التباين،أي أن تقديرات المعلمات تظل غير متحيزة $E(\hat{b}) = b$

ثانيا: اختلاف التباين يمثل مشكلة بالنسبة للأخطاء المعيارية حيث يكون تقدير الأخطاء (نفسها) المعيارية متحيزة وغير كفء مما يجعل الاختبارات الإحصائية لمعنوية المعلمات وفترات الثقة خاطئة حيث

$$t = \frac{\hat{b} - b}{S_b}$$

كلما كانت S_b كبيرة كلما كانت t صغيرة، أي أن كل ما كان الانحراف المعياري كبير كلما كانت t المحسوبة صغيرة.

س: كيف يمكن التغلب على هذه المشكلة؟

نفترض أن لدينا هذه العلاقة $Y_i = a + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \mu_i$

وحينما أجري الاختبار وجد أن هناك مشكلة في المتغير المستقل X_{i1} (حيث أن Y_i الاستهلاك، X_{i1} الدخل، X_{i2} عدد الأبناء) وبالتالي يجب تحويل المتغيرات في النموذج عن طريق ترجيح النموذج أي نقسم على X_{i1}

$$\frac{Y_i}{X_{i1}} = \frac{a}{X_{i1}} + b_1 \frac{X_{i1}}{X_{i1}} + b_2 \frac{X_{i2}}{X_{i1}} + \frac{\mu_i}{X_{i1}} \qquad (*)$$

ثم يعاد تقدير النموذج (*) بطريقة المربعات الصغرى العادية.

مثال نفترض أن لدينا ٣٥ مشاهدة والمراد تقدير معلمات الدالة بعد الكشف عن ما إذا كان هناك أي مشكلة متعلقة بالبيانات أم لا؟

الخطوات:

١- رتب البيانات تصاعديا.

٢- قسم البيانات إلى ثلاثة مجموعات ثم احـذف المجموعـة الوسـطى وهـي ٧ مشاهدات.

٣- قدر انحدارين الأول للقيم الصغرى والثاني للقيم الكبرى وافترض أن التقديرات كانت كالآتي:

خط الانحدار الأول

$$\hat{Y}_{14} = 2.23 + 0.16X_{i1} - 0.22X_{i2}$$
$$(1.90) \quad (-0.8)$$

$R^2 = .94$

$Ess_1 = 0.988$

خط الانحدار الثاني

$$\hat{Y}_{14} = 16.10 + 0.115X_{1i} + 104X_{i2}$$
$$(3.36) \quad (3.36)$$

$Ess_2 = 5.114$

الحل: تمثل القيم التي بين القوسين قيم t المحسوبة]

أولا نحسب درجات الحرية كالتالي:

$$(N - d - 2k)/2 = (35 - 7 - 2(3))/2 = \frac{22}{2} = 11$$

$$\therefore F_{11}^{11} = \frac{ESS_2}{ESS_1} = \frac{5.114}{0.908} = 5.63$$

نقارن F المحسوبة و F الجدولية (حيث أن F الجدولية تساوي 2.23) من المقارنـة نستنتج أن F المحسوبة أكبر من F الجدولية مما ينتج عنه أن هناك مشكلة في البيانـات وأن التباين غير ثابت مما يخالف أحد فروض طريقة تقدير المربعات الصغرى العادية.

∵ النموذج المقدر قبل التصحيح لكل مشاهدات العينة كان كالتالي:

المعادلة القابلة للتصحيح:

$$\hat{Y}_i = 6.14 + 0.2X_{1i} - 052X_2$$
$$(12.39) \quad (-2.67)$$

$$R^2 = .98$$

النموذج المقدر بعد الترجيح كان كالتالي:

$$Y_i / X_{1i} = 0.21 - 8.45 / X_{i1} - 0.18 \; (X_{i2} / X_{i1})$$

$$(12.34) \qquad (2.98)$$

$$R^2 = .93$$

(درجة الحرية) = $(N - d - 2k)/2$

$$d.f = 35 - 7 - 6 = 22 / 2 = 11$$

الجدولية $f_{11}^{11} = 2.82$

مثال آخر: العلاقة بين الاستهلاك والدخل

$$C_i = a + bY_i$$

ونفترض أننا اكتشفنا أن هناك مشكلة عدم ثبات التباين أي أن:

$$E(u_i)^2 = \sigma^2 u_i$$

حيث أن C_i هو الاستهلاك ، Y_i هو الدخل فإن تقدير خط الانحدار قبل التصحيح كالتالي:

$$\hat{C} = 1.480 + 0.788Y$$

$$(3.29) \quad (3.59)$$

$$R^2 = 0.97$$

والقيم التي بين الأقواس تعبر عن قيمة t المحسوبة أما إذا أردنا أن نصحح خط الانحدار مع التغلب على مشكلة عدم ثبات التباين فإن خط الانحدار المقدر يصبح:

$$\hat{C} / Y_i = a / Y_i + b = 0.792 + 1.421(1 / Y_i)$$

$$(31.51) \quad (3.59)$$

$$R^2 = 0.32$$

يلاحظ بعد تقدير خط الانحدار زادت المعنويات الإحصائية لمعلمة الدخل وأصبحت ٣١,٥١ بعد أن كانت ٢٩,٤ وبالتالي نكون حصلنا على التقدير الصحيح للمعلمة وأهميتها.

المشكلة الثانية: الترابط السلسلي

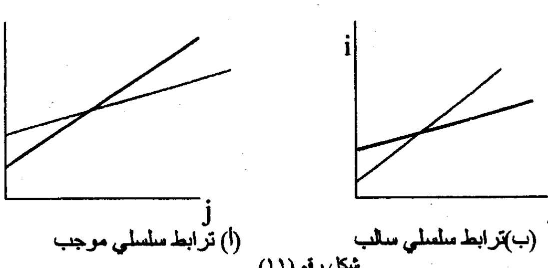
Serial Correlation (Autocorrelation)

أولا: الارتباط السلسلي والآثار المترتبة عليه:

كثيرا ما يصاحب الترابط السلسلي البيانات المتعلقة بالسلاسل الزمنية وقليلا ما يصاحب البيانات المقطعية، ويعنى الترابط السلسلي أن الخطأ العشوائي في هذه الفترة يؤثر على الفترات المستقبلية أو أن الخطأ العشوائي الحالي متأثر بالأخطاء العشوائية السابقة .

$$Cov(\mu_i \mu_j) \neq 0 \qquad \text{أي } i \neq j$$

والمثال على ذلك حينما يكون التنبؤ على مخزون الأسهم وهذا التقدير كان مبالغ فيه (overestimated) وهذا ينعكس في تقدير المخزون في السنوات القادمة. وهناك الترابط السلسلي الموجب وآخر سالب والشكل التالي يوضح ذلك.



شكل رقم (١١)

في الشكل (أ) نجد أن هناك ترابط سلسلي موجب ونجد أن تقدير معلمة الانحدار أقل من المعلمة الحقيقية. أما في حالة الترابط السلسلي سالب(شكل ب) نجد أن الميل (المعلمة) المقدرة أعلى من الميل الحقيقي لخط الانحدار، وحيث أن كلا من الحالتين من الممكن حدوثهما بالتساوي فإن تقديرات الميل (المعلمة) على المتوسط يكون صحيح أي غير متحيز . إلا أن تقدير معامل التحديد (R^2) يكون مقداره مبالغ فيه،هذا بالإضافة إلى أن تقديرات التباين تكون أصغر من التباين الحقيقي أو أكبر منه،وبالتالي نجد أن اختبارات المعنوية تصبح مضللة.

ثانيا: أسباب الترابط السلسلي

١- تتميز السلاسل الزمنية المتعلقة بالاقتصاد بأن هناك ترابط سلسلي بها والمثال على ذلك هو أن الناتج القومي الإجمالي والبطالة يمكن أن تتأثر بالتقلبات الموسمية والدورات الاقتصادية.

٢- قد يكون النموذج غير محدد بطريقة سليمة، فإذا فرض أن لدينا نموذج يأخذ هذا الشكل من العلاقة بين التكلفة الحدية والناتج كالتالي:

$$MC = B_1 - B_2 Q_t + B_3 Q_t^2 + \mu_t$$

وكان النموذج المستخدم لقياس الظاهرة هو عبارة عن علاقة خطية

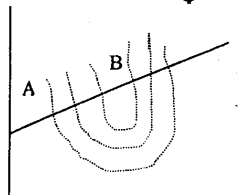
$$MC = B_1 - B_2 Q_t + \mu_t$$

حيث أن الإنتاج Q_t

التكلفة الحدية MC

الخطأ العشوائي μ_t

ويمكن تصوير هذه العلاقات كالتالي



شكل (١٢) علاقة دالية متحيزة

نلاحظ من الشكل الأعلى أن بين النقطتين A,B أن التكلفة الحدية قدرت بأعلى من التكلفة الحقيقية بينما خارج هاتين النقطتين نجد أننا قدرنا التكلفة الحدية بأقل من التكلفة الحقيقية، في هذه الحالة نجد أن μ_t تعكس ترابط سلسلي وذلك بسبب سوء تحديد النموذج بطريقة سليمة.

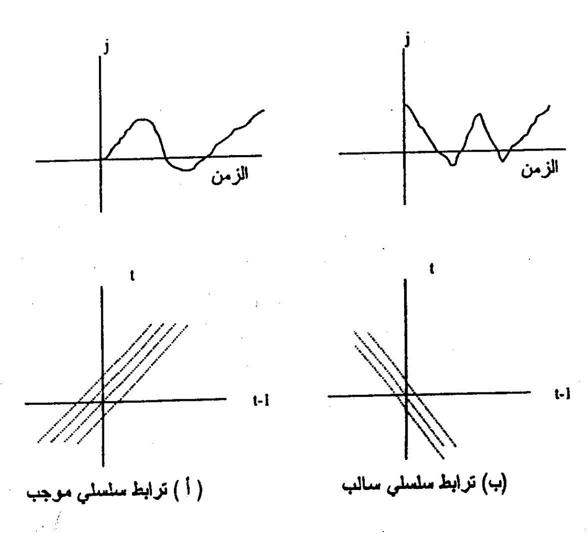
٣- استجابة المتغير التابع للمتغير المستقل بفترة زمنية مؤخره وهذه الظاهرة تظـــهر فـــي قطاع الزراعة حيث نجد أن الكمية المعروضة لا تستجب عدة شهور أو سنة للزيـــادة في الأسعار وبالتالي يكون هناك احتمال وجود ترابط سلسلي فـــي هـــذا النـــوع مـــن البيانات.

ثالثا: اختبار وجود الترابط السلسلي

هناك طريقتان متعارف عليهما للكشف عن الترابط السلسلي هما:-

١- التوقيع البياني للبواقي. ٢- اختبار ديربن واطسن.

١- التوقيع البياني للبواقى وذلك عن طريق تمثيل البواقى مع متغير الزمن واكتشاف مـا إذا كان الترابط موجب أو سالب.



شكل رقم (١٣)

المصدر: (Domodar Gujarati, 1978, p.224)

يوضح الشكل (أ) أن هناك ترابط سلسلي موجب بين الأخطاء العشوائية أي إذا كـــان هناك زيادة في الطلب على سلعة ما في السنة الماضية أو الحالية فإنه يتوقع أن هـــذه الزيـــادة في الطلب سوف تستمر في المستقبل.

أما الشكل (ب) فإنه يوضح أن هناك ترابط سلسلي سالب أي أن الخطأ العشوائي في الماضي يودى إلى التعلم بحيث يؤدى إلى سلوك آخر مما ينتج عنه علاقة سالبة بين الخطأ العشوائي وبين الزمن.

٢- اختبار دربن واطسن (Durbin - Watson)

تتلخص خطوات هذا الاختبار كالتالي:

١- يقدر نموذج خط الانحدار بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، ويجب أن يحتوي هذا الخط على مقطع.

٢- نحصل من الخطوة الأولى على تقدير للمتغير التابع (Y_t)

٣- نطرح القيم المقدرة لـ $(\hat{Y}_t)$ من القيم الحقيقية (Y_t) حتى نحصل على البواقى (e_t) أي

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

٤- بنفس الخطوات السابقة نحصل على

$$e_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1}$$

٥- يستخدم اختبار دربن واطسن وهو

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{t} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t} e_t^2}$$

٦- يختبر الفرض العدمي وهو $H_0 : P = 0$

حيث P تظهر في الفروق العامة للنموذج الخطى كالتالي

$$Y_t - PY_{t-1} = B_1(1-P) + B_2(X_{1t} - PX_{1t-1}) + \dots\dots\dots$$
$$= B_k(X_{kt} - PX_{kt-1}) + V_t$$

جدول اتخاذ القرار لدربن واطسن:

القرار	قيمة DW
رفض الفرض العدمى في صالح وجود ترابط سلسلي سالب	$4-d_L<DW<4$
لا يمكن قبول أو رفض الفرض العدمى	$4-d_u<DW<4-d_L$
قبول الفرض العدمى في صالح عدم وجود ترابط سلسلي	$2<DW<4-d_u$
قبول الفرض العدمى في صالح عدم وجود ترابط سلسلي	$d_u<DW<2$
لا يمكن قبول أو رفض الفرض العدمى	$d_L<DW<d_u$
رفض الفرض العدمى في صالح وجود ترابط سلسلي موجب	$0<DW<d_L$

المصدر: Pindyck and Rubinfeld, 1981,160

ويلاحظ أنه في حالة وجود ارتباط سلسلي فإن هناك طريقة مباشرة لتقدير P كالتالي:

$$\hat{P}=1-DW/2$$

ويقدر خط الانحدار باستخدام قيمة($\hat{P}$)

رابعا:علاج مشكلة الترابط السلسلى:

يعتمد العلاج على مصدر الارتباط الذاتي.

١- طريقة دربن:

فإذا كان مصدر الارتباط هو حذف بعض المتغيرات، والمثال على ذلك هو الاستهلاك يعتمد على الدخل في الفترة الحالية والفترات السابقة وبالتالي فإننا ندخل متغير أخر بفترة إبطاء Y_{t-1}

$$Y_t=a+b_1X_{1t}+b_2X_{2t}+\mu_t$$

$$PY_{(t-1)}=Pa+Pb_1X_{1(t-1)}+Pb_2X_{2(t-2)}+P_{\mu(t-1)}$$

$$Y_t-PY_{(t-1)}=B_1(1-P)-B_2(X_{1t}-P\,X_{1(t-1)})+.....+B_K(X_{kt}-PX_{kt-1})+V_t$$

وبالتالي نحصل على تقديرات ($\hat{P}$).

ويمكن تحسين التقديرات إذا وضع تقدير($\hat{P}$) في النموذج التالى:

$$Y_t-\hat{P}Y_{(t-1)}=B_1(1-P)-B_2(X_{1t}-\hat{P}\,X_{1(t-1)})+.....+B_K(X_{kt}-\hat{P}X_{kt-1})+\hat{V}_t$$

٢- إذا كان المصدر هو شكل النموذج فإننا نغير شكل النموذج لمعالجة مشكلة الترابط السلسلى.

٣- طريقة Cochrane-Orcutt كاوكرن

هذه الطريقة تعتمد على التجربة للحصول على أحسن تقدير ل(P)وذلك عن طريق الخطوات التالية:

أ- تطبق طريقة المربعات الصغرى العادية على النموذج الأصلي ثم نحصل على تقدير للبواقي (e_t).

ب-نكون نموذجا للانحدار جديد لتقدير ($\hat{P}$) كالتالي:

$$\hat{P} = \frac{\Sigma e_t e_{t-1}}{\Sigma e_{t-1}}$$

المحاولة الأولى

جـتستخدم القيمة المقدرة $\hat{P}$ لتحويل البيانات الأصلية ثم نطبق OLS.

$$Y_t - \hat{P}Y_{(t-1)} = B_1(1-\hat{P}) - B_2(X_{1t} - \hat{P}\, X_{1(t-1)}) + \ldots + B_K(X_{kt} - \hat{P}X_{kt-1}) + V_t$$

تقدر معلمات النموذج في المرحلة الثانية ونستخدمها لاستخراج قيمة البواقي.

$$e_t = Y_t - B_1 X_{1t} - \ldots - B_k X_{kt}$$

$$\hat{e}_t = Y_t - \hat{\hat{B}}_1 - \hat{\hat{B}}_2 X_t$$

من هذه المرحلة نحصل على معامل الارتباط الذاتي للمرحلة التالية:

$$\hat{\hat{P}} = \Sigma \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} / \Sigma e_{t-1}$$

ويمكن إجراء هذه الخطوات أكثر من مرة للحصول على أحسن تقدير ل(P) إلا أن هذه الطريقة قد تؤدى بنا إلى نتائج محددة (Local) وليست عامة (Global) وهى المستهدفة.

والخطوة الأخيرة تستخدم $\hat{\hat{P}}$ لتحويل المتغيرات الأصلية وتطبق OLS

$$Y_t = B_1(1-\hat{\hat{P}}) - B_2(X_{1t} - \hat{\hat{P}}\, X_{1(t-1)}) + \hat{\hat{P}}Y_{t-1} + \mu^{**}$$

ملحوظة: هذه الطريقة يقوم بإجرائها الكمبيوتر عن طريق برنامج SPSS في نماذج تحليل السلاسل الزمنية.

أمثلة:

المثال الأول: (اختلاف التباين)

افترض أن هناك ٣٠ شركة في إحدى الصناعات ونرغب في معرفة علاقــة النــاتج بعدد العاملين فى هذه الشركات. فإذا كان الناتج هو Y_i وعدد العاملين X_i، كيف يمكن التــأكد من أن تباين حد الخطأ ثابت بالنسبة لكل قيم المتغيرات المستقلة؟

الحل:

أولا: ترتيب البيانات من القيم الأصغر إلي القيم الأكبر للمتغير المستقل X_i

ثانيا: إسقاط الست مشاهدات الوسطى.

ثالثا: إجراء انحداريين واحد للقيم الصغرى للمتغير X_i والآخر للقيم الكبرى لـ X_i

رابعا: نقدر $F = Ess_2 / Ess_1$

ونقارنها بـ F الجدولية بدرجات حرية $(n-d-2k)/2$

فإذا كانت نتائج الانحدارين كالتالي:

$$\hat{Y}_1 = 8.1 + 0.006X_i \qquad R^2 = 0.66 \qquad Ess_1 = 0.507$$

$$\hat{Y}_2 = 6.1 + 0.013X_i \qquad R^2 = 0.60 \qquad Ess_2 = 3.095$$

نقدر $F = \frac{Ess_2}{Ess_1} = \frac{3.095}{0.507} = 9.10$ المحسوبة

وبمقارنتها بـ F الجدولية حرية (١٠ ، ١٠) فإن النتيجة تكــون F الجدوليــة < F المحسوبة وبالتالي نستنتج أن التباين غير ثابت ويمكن علاج ذلك بقسمة طرفي المعادلة علــى X_i ويصبح الانحدار المصحح كالتالي

$$Y_i / X_i = a / X_i + b + \mu_i$$

ويصبح المقطع هو الميل والميل هو المقطع عند تفسير النتائج.

المثال الثاني (الترابط السلسلى):

افترض أنك حصلت على النتائج التالية

$$\hat{Y}_t = 6.61 + 1.63X_t \qquad R^2 = 0.98$$
$$d = 0.70$$

حيث أن $\hat{Y}_t$ مستوى المخزون X_t المبيعات، d دربن واطسن المحسوبة

وحيث أن $d < d_L = 1.20$ عند مستوى معنوية 5% مع N = 20، K=1 فإن ذلك يدل على وجود ترابط سلسلي.

ولتصحيح هذا الترابط السلسلى أجرى الانحدار التالي وكانت النتائج كالتالي:

$$Y_t = 4.08 - 0.74Y_{t-1} - 1.49X_t - 1.11X_{t-1}$$

تذكر أن

$$Y_t - PY_{t-1} = B_1(1-P) + B_2(X_t - PX_{t-1}) + V_t$$

وبإعادة ترتيب المعادلة

$$Y_t = B_1(1-P) + PY_{t-1} + B_2X_t - B_2PX_{t-1} + V_t$$

وبالتالي نجد أن قيمة P=.74 في الخط المقدر وباستخدام هذه القيمة لتحويل المتغيرات الأصلية حتى يمكن التغلب على مشكلة الترابط السلسلى.

المشكلة الثالثة: مشكلة وجود علاقة خطية بين التغيرات التفسيرية

Multicollinearity

عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرات التفسيرية هي أحد الفروض الأساسية لطريقة المربعات الصغرى العادية، ولكن يتحقق إذا ما درسنا هذا الافتراض من خلال الواقع لوجدناه قلما يتحقق هذا في الحياة الواقعية وخاصة في مجال الاقتصاد فالمتغيرات الاقتصادية بطبيعتها متشابكة ومتداخلة وتؤثر كلا منها على الآخر وتأثر بها وبالتالي يجب علينا معرفة آثار هذه المشكلة على تقدير معلمات النموذج وكيفية الكشف عنها وعلاجها.

I- طبيعة هذه المشكلة:

الارتباط الخطي قد يكون تام بين متغيرين أو أكثر أو قد يكون مرتفع ففي حالة وجود ارتباط خطي تام فإنه يتعذر وجود قيمة معلمة النموذج المقدرة لا يمكن حساب قيمة المعلمة، وذلك لأن قيمة المحدد الأساسي يساوي الصفر وبالتالي فإننا لا يمكن الحصول على قيمة معلمة الدالة.

مثال: إذا كانت المعادلات الطبيعية كالتالي:

$$X_1 + 2X_2 = 3$$
$$2X_1 + 4X_2 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$|\Delta| = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$X_1 = \frac{|\Delta_{x_1}|}{|\Delta|} = \frac{2}{0} = \infty$$

أي غير معروفة

من هذا المثال نجد أن قيمة المحدد الأساسي تساوى صفر وبالتالي يتعذر إيجاد قيم X_2,X_1 إلا أنه في أغلب الحالات نجد أن الارتباط قد يكون مرتفع ولكن لا يكون تام. ويجب ملاحظة أن الارتباط الخطى هو ظاهرة في معظم العلاقات الاقتصادية وبالتالي فإن الارتباط الخطى ليس أكث من مجرد حالة قد توجد أو لا توجد.

ومن أمثلة الارتباط في المتغيرات الاقتصادية هو ترابط الدخل المكتسب بالثروة في دالة الاستهلاك. كما أن عدد السكان والدخل مترابطان في دالة الطلب على سلعة ما.

أسباب الترابط بين المتغيرات الاقتصادية:

١- تظهر هذه المشكلة بوضوح في بيانات السلسلة الزمنية فنجد أن زيادة الدخل يصحبه زيادة في الثروة في أوقات الرواج والعكس صحيح في أوقات الكساد، وقد تظهر هذه المشكلة في البيانات المقطعية أيضا ولكن ليس بدرجة كبيرة.

٢- إذا استخدمت متغيرات ذات فترات إبطاء للمتغير التابع، أي قد يستخدم الاستهلاك في السنوات السابقة كمتغير مستقل لتفسير التغير في الاستهلاك كمتغير تابع. وبالتالي فإنه من الطبيعي أن يوجد ترابط بين استهلاك سنة وأخرى.

٣- تظهر مشكلة الترابط بين المتغيرات المستقلة حينما تدمج البيانات السلسلية والبيانات المقطعية على الرغم من أنه في وقت ما استخدمت وسيلة الاندماج بين البيانات كوسيلة للتخلص من الترابط الخطى ولكن ثبت أنه ليس علاج بل يزيد من المشكلة.

٤- صغرحجم العينة قد يؤدى إلى الترابط الخطى.

الآثار المترتبة على الترابط بين المتغيرات المستقلة:

١- يظل تقدير المربعات الصغرى العادية غير متحيز وبالتالي لا تهدم خاصية هامة من خواص تقديرات المربعات الصغرى العادية وهى خاصية أنها تقديرات غير متحيزة ،هذا إذا كان الترابط غير تام أما إذا كان الترابط تام فإنه لا يمكن الحصول على تقدير لمعلمات النموذج.

٢- تقدير المعلمات يكون غير كفؤ أي أن الترابط يؤثر على التباين لمعلمات النموذج ويجعله كبير مما يجعل اختبار الفروض غير مجدية وتقل قيمة (t) المحسوبة حيث أن

التباين يدخل في تقدير أو حساب t والتي نستنتج منها أهمية المتغير المستقل بالنسبة للمتغيرات التابع.

٣- يؤدي ارتفاع الترابط بين المتغيرات المستقلة إلى ارتفاع قيمة معامل التحديد (R^2) رغم قد يحدث أنه ليس من معالم الدالة أو النموذج ما هو ذات معنوية إحصائية.

٤- وجود الامتداد الخطي يؤدي إلى تضليل الباحث وواضعي السياسة الاقتصادية حيث قد تستنتج علاقات غير صحيحة من هذه التقديرات.

الكشف عن مشكلة الترابط بين المتغيرات المستقلة:

هناك عدة طرق للكشف عن مشكلة الترابط الخطي منها:

١- استخدام معامل الارتباط البسيط (Simple correlation) فإن كان معامل الارتباط مساو الواحد دل ذلك على الارتباط التام بين المتغيرين إذا كان أقل من الواحد دل ذلك أيضا على وجود ارتباط تام بين المتغيرين وحينما يكون مساويا للصفر دل ذلك على عدم وجود قيمة معينة لمعامل الارتباط تكون فاصلا في استنتاج وجود علاقة أو عدم وجد علاقة بين المتغيرات.

٢- اختبار فارار جلوبر Farrar Glauber Test

اختبار فارار جلوبر يتكون من ثلاث اختبارات أساسية هي:

أ- اختبار مربع كاى (X^2) وهو يستخدم لمعرفة وجود علاقة أم لا ودرجة شدة العلاقة بين المتغيرات المستقلة وذلك في حالة النموذج الذي يحتوي على أكثر من متغيرين. والفرض العدمي هو أنه ليس هناك علاقة بين المتغيرات المستقلة أي أن

$$H_0: \quad r_{x_{i1},x_{i2}} = 0$$
$$H_1: \quad r_{x_{i1},x_{i2}} = 1$$

وتستخدم مربع كاى المحسوبة (X^2) وتقارن بالجدولية فإذا كانت مربع كاى المحسوبة أكبر من الجدولية نرفض الفرض العدمي في صالح الفرض البديل وهو وجود مشكلة الترابط بين المتغيرات التفسيرية.

ب- اختبار (F)

لتحديد المتغيرات المستقلة المسببة للمشكلة يستخدم اختبار F . ويمكن تنفيذ هذا الاختبار كالتالي:

نضع أولا فرض العدم مع افتراض أن لدينا ثلاث متغيرات مستقلة

$$H_0 : R^2_{1.23} = R^2_{2.13} = R^2_{3.12} = 0$$

أما بالنسبة للفرض البديل:

معامل الارتباط لأحد هذه المتغيرات لا يساوى صفر على الأقل :

$$H_1 : r_1 \neq 0$$

وصيغة F كالتالي:

$$F_{n-K} = \frac{R^2_{1.23} / (K-1)}{1-R^2_{1.23} / (n-K)}$$

حيث أن :

K: عدد معلمات النموذج ، n :عدد مشاهدات العينة

فإذا كانتFالمحسوبة أكبرF الجدولية نستنتج أن هناك مشكلة بالمتغير الأول وبالتالي نرفض فرض العدم في صالح الفرض البديل. وهكذا تحسب F لكل من X_3,X_2 بنفس الطريقة الأولى.

جـ- اختبار (T) :

يفيد اختبار (T) في تحديد المتغيرات المستقلة المترابطة مع بعضها البعض أي التعرف على كل متغيرين معا والمشتركين في الترابط المرتفع وهذا الاختبار يقوم على مدى معنوية الارتباط الجزئي أي اختبار الفرض العدمى والبديل كالتالي:

$$H_0 : r_{12.3} = r_{13.2} = r_{23.1} = 0$$

الفرض البديل:

الارتباط الجزئي بين المتغيرات لا يساوى الصفر على الأقل لوحدة من معاملات الارتباط الجزئي.

والاختبار المستخدم هو اختبار T

$$T = \frac{r_{12.3}\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r_{12.3}^2}}$$

وهذه هي T المحسوبة والتي نقارنها بـ T الجدولية فإذا كانت T المحسوبة أكبر من T الجدولية فإننا نرفض الفرض العدمي لصالح الفرض البديل حيث أن هناك ترابط بين المتغير الأول (X_{i1}) والمتغير الثاني (X_{i2}).

علاج مشكلة الترابط بين المتغيرات المستقلة:

هناك عدة طريق لعلاج مشكلة الترابط الخطي ولكن لكل طريقة ما يناسبها من مشكلة.

١- إذا كانت المتغيرات المستقلة لها دلالة في النظرية الاقتصادية فإننا نبقى على المتغير الذي ترجحه النظرية الاقتصادية عن المتغير الآخر. فمثلا متغير الدخل له علاقة قوية بالاستهلاك وتنص النظرية الاقتصادية على أن الدخل متغير هام بالنسبة للاستهلاك (سلع عادية) أما متغير السكان فهو أيضا متصل بالاستهلاك ولكنه لا يتمتع بعلاقة قوية بالنسبة للاستهلاك مثل الدخل، فإذا كان السكان والدخل ذات ترابط مرتفع فإننا يمكن إسقاط متغير السكان والإبقاء على متغير الدخل. وهذا الإسقاط يكون ملحا إذا كان الترابط تام وبالتالي يتم استبعاد متغير السكان لصالح متغير الدخل.

٢- أما إذا كان هناك ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة وكل المتغيرات المستقلة كان لها قوتها في النظرية الاقتصادية فإننا نتبع أحد الحلول الآتية:

أ- زيادة حجم العينة قد يساعد على تقلص مشكلة الارتباط الخطي.

ب- إدخال معادلات إضافية في النموذج المكون ويصاغ النموذج بطريقة سليمة (أي إعادة بناء النموذج).

جـ- تقدير معالم النموذج على مرحلتين باستخدام بيانات مقطعية مع البيانات السلسلية الأصلية للمساعدة في التخلص من هذه المشكلة والمثال التالي يوضح كيفية عمل ذلك (برعي خليل، ١٩٩٤! ص ١٩٣-١٩٧):

إذا كان لدينا دالة طلب على سلعة ما، والكمية المطلوبة دالة (أي تتوقف على) سعر هذه السلعة والدخل أي أن:

$$Y_i = a + b_1X_{i1} + b_2X_{i2}$$

وقد جمعت بيانات سلسلية عن الكمية المطلوبة وسعر هذه السلعة والدخل على مدى خمس سنوات كالتالي:

المتغيرات / السنة	Y_i	X_{i1}	X_{i2}
1951	28	3	100
1952	28	4.5	110
1953	30	5	120
1954	29	6	120
1955	32	6.5	150
		25	600

وقد أجرى اختبار معامل الارتباط بين X_1,X_2 ووجد أنه مرتفع أي 0.88 مما يدل على وجود ارتباط.قوى بين الدخل وأسعار السلعة محل الدراسة.

لعلاج هذه المشكلة لجأ الباحث إلى جمع بيانات مقطعية عن الكميات المطلوبة من السلعة محل الدراسة مع مستويات مختلفة من الدخل في سنة معينة وكانت البيانات كالتالي:

Y_i	X_{i2}
29	100
31	110
33	120
33	130
34	140

وقد تم احتساب معامل X_{i2} وكان تقديره كالتالي:

إجراءانحدار Y_i على X_{i2} (من البيانات المقطعية) أي انحدار خطي بسيط من بيانات مقطعية

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum \chi_{i2} y_i}{\sum \chi_i^2} = 0.12$$

بعد حساب قيمة $\hat{b}_2$ من البيانات المقطعية نقوم بطرح $\hat{b}_2 X_{i2}$ من بيانات Y_i

Y_i	X_{i2}	$\hat{b}_2 X_{i2}$	$Y_i - \hat{b}_2 X_{i2}$
28	100	12.0	16.0
28	110	12.1	15.9
30	120	14.4	15.6
29	120	14.4	14.6
32	150	18.0	14.0

من هذا الجدول يمكن تسمية $Y_i - \hat{b}_2 X_{i2} \simeq D$

وتكون صورة الدالة الجدولية كالتالي:

$$D = a + b_1 X_{i1}$$

$$\hat{b}_1 = -0.58$$

أما بالنسبة لإيجاد قيمة $\hat{a}$ (المقطع) فإننا نحصل عليه كالتالي:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}_1 \overline{X}_1 - \hat{b}_2 \overline{X}_2$$

$$\hat{a} = \left(\frac{147}{5}\right) - (0.28)\left(\frac{25}{5}\right) - (0.12)(120)$$

حيث أن $\hat{a} = 17.9$

يحصل عليها من السلسلة الزمنية	$\overline{Y}$
يحصل عليها من السلسلة الزمنية	$\overline{X}_1$
يحصل عليها من البيانات المقطعية	$\overline{X}_2$

الهوامش

١- برعى محمد خليل (دكتور) ١٩٩٤ "مقدمة في الاقتصاد القياسي" دار الثقافة العربية القاهرة.

٢- النعيمي محمد عبد العال (دكتور) ١٩٩٠ "نظرية الاقتصاد القياسي" دار الحكمة للطباعة والنشر.

٣- عطية عبد القادر محمد عبد القادر (دكتور) ١٩٩٨ "الاقتصاد القياسي" الدار الجامعية الإسكندرية.

٤- Gujarati, Domodar, 1995, Basic Econometrics, New York: McGraw-Hill Book Inc. Third Edition.

الفصل الخامس

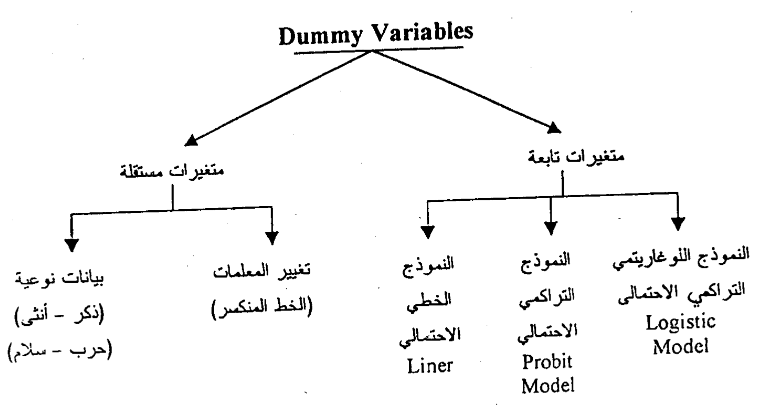
استخدام المتغيرات الصورية في تحليل الانحدار

Dummy Variables

مقدمة:

يهتم تحليل الانحدار في معظم الحالات بالتغيرات الكمية ولكن تصادفنا أحيانا بعض المتغيرات الوصفية أو النوعية في معادلة الانحدار. فإذا أدخلنا عامل الجنس مثلا ذكورا أو إناثا فإن متغير الجنس يمكن إدخاله في معادلة الانحدار كمتغير صوري باستخدام القيم (صفو) أو (واحد) أي أن D=0 إذا كان يعبر عن الإناث، D=1 إذا كان يعبر عن الذكور. ويساعد إدخال المتغيرات الصورية أيضا في تحليل البيانات الخاصة بالسلاسل الزمنية لبيان تأثر الزمن حيث تقاس التأثيرات الموسمية النصف سنوية أو الربع سنوية.

إن المتغيرات الصورية قد تستخدم كمتغير مستقل أو متغير تابع حيث أن طبيعة البيانات المستخدمة لتحليل أي ظاهرة ودراستها تستلزم معرفة نوعية النموذج المستخدم، هناك نوعين من البيانات، بيانات سلسلية وبيانات مقطعية ويمكن رسم تصور عن استخدام المتغيرات الصورية واستخدامات النماذج طبقا لأنواع هذه المتغيرات الصورية.



شكل رقم (١٤)

أولا: استخدام المتغيرات الصورية كمتغير مستقبل

تستخدم المتغيرات الصورية للتعبير عن البيانات الوصفية كما سبق الإشـــارة بالمثـــال الأول فإذا فرض أن هناك طريقتين لعملية الإنتاج لاختيار آلة من آلتين (machine) A.B.

$$\text{المتغير الصوري } D = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الناتج من الآلة A} \\ 0 & \text{إذا كان الناتج من الآلة B} \end{cases}$$

$$Q_i = \alpha_1 + \alpha_2 \; D + U_i$$

$$E(Q_i) = \alpha_1 + \alpha_2 \quad D = 1$$

$$E(Q_i) = \alpha_1 \quad D = 0$$

Q هي كمية الإنتاج وهي متغير كمي تابع، حيث تمثل α_1 إنتاج الآلة B، أما α_2 فإن هـــذه المعلمة تقيس الفرق بين إنتاج الآلة B.A أي أننا نختبر ما إذا كان استخدام الآلة (A) ســـوف يضيف إضافة ذات معنوية للإنتاج (أي زيادة الإنتاج) وبالتالي نجد أن هـــذا التحليـــل يســـاعد أصحاب المصنع أو المديرين على اتخاذ قرار الشراء للآلة الجديدة أم لا (A).

المثال الثاني:

وإذا افترض هناك أكثر من بديل لاختيار أحسن البدائل بين الآلات ولتكن ثـــلاث آلات مثلا، A, B, C

$$Q = \alpha_1 + \alpha_2 D_1 + \alpha_2 D_2 + U_i$$

$$D_1 = \begin{cases} 1 & \text{إذا كنا الناتج من الآلة A} \\ 0 & \text{من الآلات الأخرى} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 1 & \text{إذا كنا الناتج من الآلة B} \\ 0 & \text{من الآلات الأخرى} \end{cases}$$

Machine	D_1	D_2
A	1	0
B	0	1
C	0	0

إنتاج الآلة A $E(Q) = \alpha_0 + \alpha_1$

إنتاج الآلة B $E(Q) = \alpha_0 + \alpha_2$

إنتاج الآلة C $E(Q) = \alpha_0$

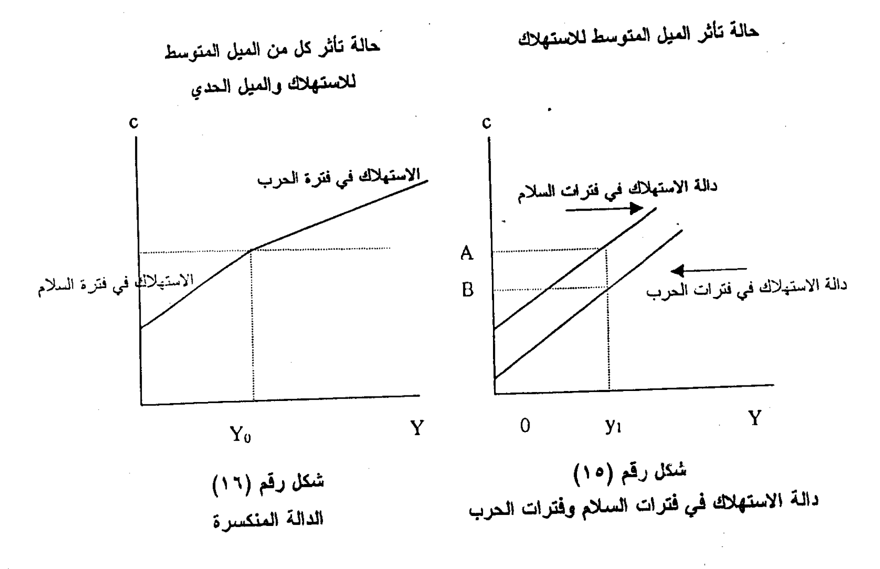
نحن نلاحظ أن كلا من α_1 ، α_2 يمثلان الزيادة في الإنتاج نتيجة لاستخدام الآلة A والآلة B بالمقارنة بالآلة C وبالتالي إذا كانت هذه المعلمات $(\alpha_2 + \alpha_1)$ ذات معنوية إحصائية لكل منهما فإن الاختيار بين الآلة A, B يكون على أساس مقدار المعلمة أي مقدار الناتج وغالبا سوف توضح النتائج أن إحدى هذه المعلمات تكون غير ذات معنوية إحصائية (اختبار T).

هذا ويلاحظ أننا استخدمنا متغير صوري واحد في المثال الأول ومتغيرين صوريين في المثال الثاني حتى لا نقع فيما يسمى بمصيدة المتغيرات الصورية (Dummy Variables Trap)، حيث أن وجود متغيرات صورية مساويا لعدد المتغيرات ينشأ معه ترابط تام بين المتغيرات مما يجعل من المستحيل تقدير معلمة الدالة.

يمكن استخدام المتغيرات الصورية مع المتغيرات الكمية في نفس النموذج كمتغيرات مستقلة. قد يدخل المتغير الصوري مستقل بمفرده أو قد يدخل مع المتغيرات الكمية (Interaction) ولكن يجب على الدارس ملاحظة ما إذا كان الفرد يعتقد أن هناك تغيير في مقطع الدالة (هذا المقطع قد يعبر الميل المتوسط للاستهلاك أو الميل المتوسط للادخار) وفي ميل الدالة يعبر عن الميل الحدي للاستهلاك أو الميل الحد للادخار.

المثال الثالث:

إذا افترض أن لدينا دالة استهلاك وأن هناك فترات حرب وفترات سـلام ونريـد أن نختبر مدى تأثير الاستهلاك بفترات الحرب وفترات السلام أي أن هناك تغيير في المقطع (Intercept) أي الميل المتوسط للاستهلاك. والشكل التالي يوضح مـدى تـأثر الاستهلاك بالحرب.



شكل رقم (١٦)
الدالة المنكسرة

شكل رقم (١٥)
دالة الاستهلاك في فترات السلام وفترات الحرب

يلاحظ أن منحني الاستهلاك انتقل إلى أسفل مسجلا مستويات استهلاك منخفضة عند نفس الدخل أي من النقطة A إلى النقطة B عند الدخل Y_1 ويمكن تمثيل هـذه العلاقـة بالنموذج التالي:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \alpha_2 Y_t + \mu_i \qquad (٢)$$

حيث أن

$$D = \begin{cases} 1 & \text{فترات السلام} \\ 0 & \text{فترات الحرب} \end{cases}$$

وبذلك يكون الاستهلاك المتوقع كالتالي:

(٣) في فترة السلام $$E(C_t)=(\alpha_0+\alpha_1)+\alpha_2 E(Y_t)$$

(٤) في فترة الحرب $$E(C_t)=\alpha_0+\alpha_2 E(Y_t)$$

وهذا المثال يوضح أن الميل المتوسط للاستهلاك هو الذي تأثر وبقي الميـــل الحـــدي للاستهلاك ثابت.

المثال الرابع:

إذا افترض أن ميل الدالة هو الذي تأثر بفترات الحرب أي أن الميل الحدي للاســتهلاك قد تأثر فإن التعبير عن ذلك بالنموذج التالي:

(٥) $$C_t=\alpha_0+\alpha_1 Y_t+\alpha_2 DY_t+U_i$$

بأخذ التوقع لكلا الطرفين

(٦) $D=1$ $$E(C_t)=\alpha_0+(\alpha_1+\alpha_2)E(Y_t)$$

(٧) $D=0$ $$E(C_t)=\alpha_0+\alpha_1 E(Y_t)$$

المثال الخامس:

إذا افترض أن كلا من متوسط الاستهلاك والميل الحدي للاستهلاك قد تـــأثر بفــترات الحرب فالنموذج يأخذ الشكل التالي:

(٨) $$C_t=\alpha_0+\alpha_1 Y_t+\alpha_2 D+\alpha_3 DY_t+U_i$$

بأخذ التوقع لكلا الطرفين:

(٩) $D=1$ $$E(C_t)=(\alpha_0+\alpha_1)+(\alpha_2+\alpha_3)E(Y_t)$$

(١٠) $D=0$ $$E(C_t)=\alpha_0+\alpha_1 E(Y_t)$$

كل النماذج السابقة تفترض أن التباين ثابت في فترات الحرب إلى فترات السلام.

وأيضا تفترض أن دالة الاستهلاك دالة مستمرة (Continuous Function) إلا أنـــه في بعض الأحيان تكون دالة الاستهلاك منكسرة نتيجة لحدوث انهيار هيكلـــي (Structural break).

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 (Y_t - Y_{t_0}) D + \mu_i \qquad (١١)$$

حيث أن

$$D = \begin{cases} 1 & \text{if } t > t_0 \quad \text{في فترة السلام} \\ 0 & \text{otherwise (في الفترات الأخرى)} \end{cases}$$

بأخذ التوقع لكلا الطرفين

(١٢) في حالة $D = 1$ $E(C_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(Y_t) - \alpha_2 E(Y_t - Y_{t_0})$

في حالة $D = 0$ $E(C_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(Y_t)$

ثانيا: استخدام المتغير الصوري كمتغير تابع

هذا القسم يهتم بالنماذج التي يكون فيها المتغير التابع مرتبط باثنين أو أكثر من الاختيارات النوعية أي حينما يكون المتغير التابع غير متصل. هذه النماذج لها استخدامات واسعة في مجال الاقتصاد والإدارة والمجالات الأخرى وذلك نتيجة لانتشار استخدام استمارات الاستقصاء (Surveys data) وما بها من بيانات نوعية (Qualitative Variables). سوف يتم التركيز في هذا الجزء على تحليل النماذج التي يكون فيها المتغير التابع متغير متقطع (Binary choice) عن طريق دراسة ثلاثة أنواع من النماذج هي:

أ- النموذج الاحتمالي الخطي Linear Probit Model

ب- النموذج التراكمي الاحتمالي Probit Model

جـ- النموذج الخطي التراكمي اللوغاريتمي الاحتمالي Logistic Model

أ- النموذج الاحتمالي الخطي Linear Probit Model

هذا النموذج بداية جيدة لأنه يعتبر امتداد مباشر لاستخدام المتغيرات الصورية Dummy Variables. هذا النموذج يفترض أن الأفراد يقابلهم قرار الاختيار أو المفاضلة بين بديلين وأن القرار المتخذ يتوقف على خصائص الأفراد. نفترض أيضا أن لدينا معلومات عن إمكانية تقدير معادلة للتنبؤ بقرارات الأفراد الغير موجودين في العينة الأصلية.

مثال ذلك، إذا افترضنا أننا نرغب في بناء نموذج ليساعدنا في عمل توقعات عن كيفية تصويت الأفراد على موضوع مثل أذون الخزانة المحلية، يمكن أن نتوقع أن تكون دخول الأفراد هي المحدد الأول لعملية التصويت وأن باقي المتغيرات متساوية في أهميتها. ويمكن أن نتوقع أن أصحاب الدخول المرتفعة تكون إجابتهم بنعم وبالتالي نتوقع علاقة مباشرة بين الدخول وسلوك التصويت ولكن المعلومات التي لدينا تكون غير كافية للتوقع بتصرفات كل الأفراد بدقة كاملة، وحتى يصبح التنبؤ أكثر واقعية فإننا نتوقع احتمال أن الأفراد الذين لديهم دخل معين سوف يصوتون بالموافقة (نعم) وبالتالي يصبح أحد أهداف هذا النموذج هو تحديد الاحتمال حول مجموعة من الأفراد الذين لديهم خصائص متشابهة بأن يأخذوا قرار معين دون الآخر. وبصفة خاصة نتمنى أن نصل إلى علاقة بين مجموعة الخصائص التي تصف الأفراد وبين الاحتمال أن الأفراد سوف يقومون باتخاذ قرار معين كأساس لعلاقة خطية.

والنموذج الخطى يأخذ الصورة التالية:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + \mu_i \qquad i=1,2.....n \qquad (١٣)$$

حيث أن الدخل X_i

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا اختير البديل الأول} \\ 0 & \text{إذا اختير البديل الثانى} \end{cases}$$

عنصر الخطأ العشوائي μ_i ، وبالتالي يمكن وصف النموذج الإحتمالى:

$$E(Y_i) = 1(p_i) + 0(1-p_i) = p_i \qquad (١٤)$$

وبالتالي نجد أن معلمة خط الانحدار يمكن أن يدخل فيها احتمال تصويت الفرد بنعم، بافتراض وجود معلومات عن دخل الفرد، ويمثل ميل خط الانحدار أثر الدخل على احتمال التصويت بنعم وذلك بتغير دخل الفرد بمقدار وحدة واحدة. ويكتب النموذج الاحتمالي الخطى في الشكل التالي بحيث يسمح للمتغير المستقل أن يفسر كاحتمال كما يلي:

$$p_i = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 X_1 & 0 < \alpha_0 + \alpha_1 X_1 < 1 \\ 1 & \alpha_0 + \alpha_1 X_1 \geq 1 \\ 0 & \alpha_0 + bX_1 \leq 1 \end{cases} \qquad (١٥)$$

ويلاحظ من شكل النموذج أن القيمة المتوقعة للاحتمال قد تكون أكثر من الواحد وهـذا يمثل عيب من عيوب هذا النموذج والعيب الثاني لهذا النموذج يمثل في أن هذا النموذج يركـز على إجابة الفرد (بنعم) ويسقط المشاهدات التي تحتوي على الإجابة (بلا)، مما يؤدي إلـى أن التقدير يصبح متحيز. أما العيب الثالث لهذا النموذج فيتمثل في عدم ثبات التبـاين إذا تتبعنـا التوزيع الاحتمالي للخطأ العشوائي μ_i فإننا نلاحظ التالي.

جدول التوزيع الاحتمالي للخطأ العشوائي μ_i

y_i	μ_i	Probability
1	$1-\alpha_0-\alpha_i X_i$	P_i
0	$-\alpha-\alpha_1 X_i$	$1-P_i$

يمكن حساب التباين من الجدول كالتالي:

$$E(\mu_i^2) = (1-\alpha_0-\alpha_1 X_i)^2 P_i + (1-\alpha_0-\alpha_1 X_i)^2 (1-P_j)$$

بالتعويض عن P_i $\qquad P_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i$

$$E(\mu_i^2) = (1-\alpha_0-\alpha_1 X_i)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 X_i) + (\alpha_0 + \alpha_1 X_i)^2 (1-\alpha_0-\alpha_1 X_i) \qquad (١٦)$$

$$E(\mu_i^2) = (1-\alpha_0-\alpha_1 X_i)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 X_i) + (\alpha_0 + \alpha_i X_i)^2 (1-\alpha_0-\alpha_1 X_i) \qquad (١٧)$$

$$E(\mu_i^2) = (1-\alpha_0-\alpha_1 X_i)\ (\alpha_0 + \alpha_1 X_i) = (1-p_1)p_1 \qquad (١٨)$$

$$\therefore E(\mu_i^2) = [1 - E(Y_i)] \; E(Y_i) \qquad (١٩)$$

هذه المعادلة الأخيرة توضح أن التباين غير ثابت وهذا هو العيب الثالث لهذا النمـوذج، حيث أن عدم ثبات التباين يجعلنا غير قادرين على اختبار معنوية المعلمات ويكـــون التقديـــر غير كفء. فالمشاهدات القريبة من الواحد أو الصفر يكون عندها التباين صغير جدا أمـــا عنـــد القيمة ½ فنجد أن التباين كبير إلا أن هذا العيب يمكن التغلب عليه عن طريق استخدام طريقـــة المربعات الصغرى المرجحة (weighted least square). أما بالنسبة للقيم التي تأخذهـــا Y_i والتي تقع خارجة (0,1) يمكن أن تعالج عن طريق إسقاط هذه القيم من النموذج، أو تســـاوي بالأرقام ٠,٩٩،٠,٠١ إلا أنه في كل الأحوال نجد أن طريقة المربعـــات الصغـــرى المرجحـــة ليست مباشرة وغير سهلة ويظل التقدير غير كفء.

ب- النموذج التراكمي الاحتمالي **Probit Model**

ترتب على مشاكل نموذج الاحتمال الخطي الحاجة لنموذج ذو مواصفات بديلة. وبمـــا أن أهم المشاكل ترجع إلى حقيقة أن الاحتمالات قد تقع خارج واحد وصفر لكل قيم X_i وبمـــا أن اهتمامنا الأساسي للتعبير عن المتغير المستقل في النموذج كاحتمال لاختيار أحد البدائل فـإن متطلبات هذه العملية هي ترجمة X_i والتي تقع عند قيم أعلى الخط الحقيقي كاحتمال يقع فـــي مدى بين القيم (واحد وصفر). أيضا عملية التحويل تعمل على تعديـــل الخاصيـــة المرتبطـــة بالزيادة في X_i بأنها تربطها بالزيادة أو النقص في التغير في المتغير المستقل لكل قيم X_i هـــذه المتطلبات تقترح استخدام دالة الاحتمال المتراكمة سوف تعطـــي وســـيلة مناســـبة للتحويـــل والتوزيع الاحتمالي والناتج سوف يمثل كما يلي:

$$P_i = F(\alpha_0 + \alpha_1 X_i) = F(Z_i)$$

حيث أن دالة الاحتمال التراكمية F

متغير مستقل عشوائي X_i

هذا النموذج التراكمي الاحتمال الذي يفترض وجود مؤشر نظري Z_i يمكـــن تحديـــده بواسطة المتغير التفسيري X_i مثلما كان في النموذج الخطى الاحتمالي وبالتالي فإن المؤشـــر (Z_i) يفترض أن متغير متصل، عشوائي وموزع طبيعي لأســـباب تفاضليـــة (أي مـــن أجـــل العمليات الرياضية)، أي أن.

$$Z_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i \qquad (١)$$

هذه المشكلة مختلفة عن المشكلة الرئيسية في التفاضل من حيـــث أننـــا نفـــترض أن المشاهدات في Z_i غير موجود ولكن يوجد لدينا معلومات تفرق فقط بين هل مشاهدات الأفـــواد في الشريحة الأولى (القيم العليا للمؤشر Z_i) أم في الشريحة الثانية (القيم الدنيا للمؤشر Z_i).

ولذلك هذا النموذج يتغلب على مشكلة كيفية الحصول على تقديرات α_0 و α_1 وفي نفس والوقت يمكننا من الحصول على معلومات عن المؤشر Z_i الغـــير مقـــاس وطبقـــا للمثال المذكور سابقا (سلوك الناخبين حينما يجيب الأفراد بنعم أو لا)، نجد في هذه الحالـــة أن المؤشر Z_i يمثل قوة إحساس ومشاعر الفرد (i) للاختيار الأول (نعم)، والمؤشر بالطبع سوف يتغير بتغير الأفراد، ويفترض أن Z_i دالة خطية في الدخل. أن نموذج (Probit) يمدنا بطريقة مناسبة لتقدير ميل الدالة للعلاقة بين الدخل والاختيار.

والنموذج التراكمي الاحتمالي يفترض أن Z_i متغير عشوائي يتبع التوزيـــع الطبيعـــي وبالتالي فإن احتمال (Z_i) المقدر يكون أقل أو يساوي (Z_i) الحقيقية ويمكن حساب ذلـــك مـــن دالة الاحتمال التراكمية الطبيعية.

الدالة التراكمية يمكن التغيير عنها كالتالي:

$$P_i = F(Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\infty}^{Z_i} e^{-s^2/2} ds \qquad (٢٠)$$

حيث أن s متغير عشوائي موزع يتبع التوزيع الطبيعي وذات وســـط حســـابي صفـــر وتباينه الوحدة.

يعاب على النموذج التراكمي الاحتمالي بصفة عامة أنه يتضمن تقديرات غير خطيـــة وأن تكلفة تقدير المعلمات مرتفع في شكل وقت ودرجات الحرية.

جـ- النموذج التراكمي الاحتمالي اللوغاريتمي
Cumulative Logistic Probabilitity Function

يقوم هذا النموذج على أساس الدالة الاحتمالية التراكمية اللوغاريتمية وهي كالتالي:

$$P_i = F(Z_i) = F(\alpha_o + \alpha_1 X_i) \quad (٢١)$$

$$P_i = \frac{1}{1+e^{-z_i}} \quad (٢٢)$$

يضرب طرفي المعادلة في $\left(1+e^{-z_i}\right)$

$$P_i\left(1+e^{-Z_i}\right) = 1 \quad (٢٣)$$

بقسمة طرفي المعادلة على P_i

$$1+e^{-Z_i} = \frac{1}{P_i} \quad (٢٤)$$

بإعادة ترتيب المعادلة P_i

$$e^{-Z_i} = \frac{1}{P_i} - 1 \quad (٢٥)$$

$$e^{-Z_i} = \frac{1-P_i}{P_i} \quad (٢٦)$$

باستخدام خاصية

$$e^{Z_i} = \frac{1}{e^{-Z_i}}$$

$$e^{Z_i} = \frac{P_i}{1-P_i} \quad (٢٧)$$

$$Z_i = \log \frac{P_i}{1-P_i} \quad (٢٨)$$

$$\text{Log}\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right)=\alpha_0+\alpha_1 X_i \qquad (٢٩)$$

وبالتالي نلاحظ من المعادلة رقم (٢٩) أن المتغير التابع عبارة عن المفردة التي سوف تتخذ أحد القرارات من قرارات بين نعم ولا. هذا النموذج يحول مشكلة التنبؤ الاحتمالي بين (واحد وصفر) إلى مشكلة تنبؤ المفردات للحدث الموجود داخل نطاق الخط الحقيقي.

إلا أن هذا النموذج لا يمكن تقديره بطريقة المربعات الصغرى العادية حيث أن هناك عدة مشاكل تظهر منها إذا كان الاحتمال (P_i) يساوى صفر أو واحد فإن المفردة سوف تساوى صفر أو ما لا نهاية $P_i / 1- P_i$.

ولوغاريتم المفردة يكون غير محدد. والتقدير الصحيح لهذا النموذج يكون باستخدام طريقة (Maximum Likelihood) والتي تسمح باستخدام كل مشاهدة من أفراد العينة بأن تكون لها احتمال مميز لها.

الفصل السادس

تحليل السلاسل الزمنية

تناولنا في الفصل الخامس النماذج المتعلقة بالبيانات المقطعية وهذه البيانات نوعين:
(بيانات منشورة، وبيانات استمارة الاستقصاء) كما سبق ذكره.

المقصود بالسلسلة الزمنية:

هي مجموعة من المشاهدات التي تتولد على التوالي خلال الزمن وتتميز، أي سلسلة زمنية بأن بياناتها مرتبة بالنسبة للزمن وأن المشاهدات غير مستقلة.

أنواع السلاسل الزمنية:

هناك نوعان من السلاسل الزمنية وهما:

١- السلاسل الزمنية الوثابة Discrete Time Series وهى مأخوذة عن فترات متساوية سبق تحديدها (شهر، ربع سنة، أو سنة).

٢- السلاسل الزمنية المستمرة Continues Time Series وهى تتولد عند جميع نقاط الفترة مثل درجة الحرارة.

المشكلات المتعلقة بالسلاسل الزمنية:

١- في كثير من الحالات تظهر البيانات آثار غير مرغوب فيها مثل الفرق بين أطوال الشهور(٣٠ ، ٢٨، ٣١، ٢٩يوم) ،هذا في حالة إذا ما كان الباحث سوف يستخدم البيانات الشهرية.

٢- قد تتركز الأعياد والأجازات، وخاصة المتعلقة بالشهور العربية، في شهر واحد و بالتالي نجد أن الإنتاج في هذا الشهر قليل مقارنة بإنتاج شهر آخر.

ومن الممكن علاج المشكلتين السابقتين كما يلي:

- بالنسبة للمشكلة الأولى المتعلقة بأطوال الشهور يمكن تصحيحها كالتالي:.

لكي نحصل على إنتاج يعادل ٣٠ يوم (شهر) فإننا نستخدم الصيغة التالية:

$$\text{إنتاج شهر فبراير} = \frac{\text{٣٠(يوم)} \times \text{كمية الإنتاج (شهر فبراير)}}{\text{٢٨ (يوم)}}$$

- **يمكن إزالة الأثر الناتج من الأعياد عن طريق طول الفترة، أي نأخذ مثلا بيانات نصف سنوية أو بيانات سنوية.**
- هناك بيانات مسجلة بالقيمة النقدية (الاسمية) وهذه بيانات لا تعكس الواقع **وبالتالي يمكن معرفة القيمة الحقيقية لها عن طريق الأرقام القياسية. إلا أنه على الباحث أن يعرف متى يستخدم البيانات الخام قبل تعديلها ومتى يستخدم البيانات المعدلة.**

<u>أسباب تحليل البيانات السلسلية:</u>

هناك عدة أسباب لتحليل السلاسل الزمنية منها:

١- شرح تقلبات السلسلة في الماضي.

٢- التنبؤ بالمستقبل.

٣- دراسة تأثير أحداث معينة، مثل تأثير الحروب على الإنتاج.

استراتيجية بناء نماذج السلاسل الزمنية:

١- هناك من يرغب فى بناء نموذج مكون من متغير واحد يسمى:

Univariate Time Series Model

والمثال على هذا النموذج كالتالى:

$$Y_t = a + b\ Y_{t-1} + u_t$$

٢- هناك باحث يرغب فى بناء نموذج مكون من عدة متغيرات ويسمى هذا النموذج:

Multiple Time Series Model

والمثال على هذا النموذج كالتالى:

$$Q_t = a + b_1L_t + b_2K_t + u_t$$

حيث أن: العمل L_t

رأس المال K_t

وينقسم النموذج المكون من عدة متغيرات والتى بها فترات ابطاء إلى نوعين هما:

١- نموذج فترات الإبطاء الموزعة (Distrbuted Lag Model)

والمثال على هذا النموذج هو دالة الاستهلاك

$$Y_t = \alpha + B_0X_t + B_1X_{t-1} + B_2X_{t-2} + u_t$$

حيث أن: الاستهلاك Y_t

الدخل X_t

وقد أدخل متغير الدخل وهو متغير مستقل بفترات ابطاء.

٢- النموذج المكون من متغيرات تابعة ذات فترات إبطاء ومتغيرات مستقلة ويمكن أن تكون أيضاً ذات فترات إبطاء ويسمى هذا النموذج نموذج الانحدار الذاتى:

Autoregressive Model

والمثال على هذا النموذج هو دالة الاستهلاك أيضاً:

$$Y_t = \alpha + B_1X_t + B_2X_{t-1} + B_3X_{t-1} + u_t$$

هذا النموذج يفترض ان استهلاك الفترة السابقة (Y_t-1) يؤثر فى الاستهلاك الحالى وأيضاً يفترض أن الدخل الحالى والدخل فى الفترة السابقة يؤثران فى الاستهلاك.

أهمية إدخال فترات إبطاء فى النموذج:

نادراً ما يكون استجابة المتغير التابع للتغير فى المتغير المستقل فورية، فقد تتأخر هذه الاستجابة فترة قصيرة أو طويلة ويمكن ذكر بعض الأمثلة لتوضيح ذلك.

أولاً: إذا فرض أن شخصاً ما زاد دخله بمقدار ١٥٠٠ جنيه فى الشهر. هذا الشخص ربما يوزع هذه الزيادة كالتالى:

٨٠٠ جنيه	ينفقها على الاستهلاك الحالى
١٥٠ جنيه	ينفقها فى الشهر الذى يليه
٥٠ جنيه	ينفق على الاستهلاك فى الشهر الثالث

وهذا الشخص قد يدخر الباقى وبالتالى نجد أن دالة الاستهلاك المقدرة يكون شكلها كالتالى:

$$\hat{C}_t = 12 + 0.4Y_t + 0.3Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2}$$

حيث أن الأستهلاك المقدر = $\hat{C}_t$

الدخل = Y_t

يلاحظ من هذا النموذج أن الميل الحدى للاستهلاك فى الفترة القصيرة هو MPC=0.4 (الميل الحدى للاستهلاك) أما الميل الحدى للاستهلاك فى الفترة الطويلة فيقدر كالتالى:

$$MPC = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9$$

ثانياً: هناك فترات إبطاء طويلة بين الانفاق على البحث العلمى والتطور فى مجال الإنتاج أى أن مدى استجابة زيادة الإنتاج لنتائج البحث العلمى تأخذ فترة حتى تستخدم التقدم الفنى فى إنتاج السلع والخدمات.

ثالثاً: يلاحظ أن الشركات والأشخاص دائماً يقوم التعامل على أساس العقود وبالتالى نجد أنه إذا تغيرت الأسعار أو زادت الأجور فإن الاستجابة لهذا التغيير تكون بفترة إبطاء أى بعد انتهاء وقت العقد.

بعض النماذج التى تناولت فترات الإبطاء:

إدخال فترات الإبطاء وعددها كانت تمثل مشكلة بالنسبة للباحثين، حيث أن الباحث كان فى حيره عن عدد فترات الإبطاء للمتغير يجب إدخالها فى النموذج لكى يصل إلى تنبؤات جيدة بالإثارة التى تعكسها فترات الإبطاء على المتغير التابع. هناك عدة نماذج تناولت هذه المشكلة سوف نتناول أحد هذه النماذج وهو نموذج فترات الإبطاء الموزعة ومحاولة تقديرها.

نموذج محاولة تقدير فترات الإبطاء الموزعة:

Ad Hoc Estimation of Distributed lag Model:

هذا النموذج يقوم على تقدير عدد كبير من فترات الإبطاء. يتوقف إدخال المتغيرات ذات فترات الإبطاء وتقديرها حينما نلاحظ:

١- تغيير فى إشارة معلمه فترة الإبطاء المقدرة والتى لا تتفق مع النظرية.

٢- إذا كانت معلمة المتغير ذات فترة الإبطاء ليست ذات معنوية إحصائية والمثال التالى يوضح الخاصتين السابقتين.

إذا كانت دالة الاستهلاك المقدرة كالتالى:

$$\hat{C}_t = 8.5 + 0.5Y_t + 0.2Y_{t-1} + 0.1Y_{t-2} - 0.05Y_{t-3}$$

$$(3.7) \quad (5.2) \quad (4.1) \quad (0.02) \quad (-2.1)$$

حيث أن الأرقام التى بين الأقواس تمثل t المقدرة والتى توضح معنوية المتغير المستقل بالنسبة للمتغير التابع.

شرح نتائج هذا النموذج:

8.5 يمثل متوسط الاستهلاك بالنسبة للمستهلك.

0.5 تمثل الميل الحدى للاستهلاك فى الفترة القصيرة.

ويمكن شرح ذلك عن طريق إذا زاد الدخل بمقدار وحدة واحدة فإن الاستهلاك من هذه السلعة يزداد بمقدار 0.5 والرقم الذى بين القوس (5.2) يمثل أن هذا الدخل يلعب دوراً هاماً بالنسبة لاستهلاك هذه السلعة. أى أن الدخل ذات معنوية إحصائية بالنسبة لاستهلاك هذه السلعة. وهذه نتيجة متوقعة ومتفقة مع النظرية الاقتصادية.

وإذا تعاملنا مع معلمة المتغير (Y_{t-2}) نجد أن هذه المعلمة غير ذات معنوية إحصائية حيث أن t المقدرة (0.2) أقل من اثنين وهذه النتيجة متفقة مع الخاصية رقم ٢ والتى تدل أو تعط علامة للباحث بأنه يجب أن يتوقف عن إدخال فترات إبطاء لهذا المتغير. أما المعلمة المصاحبة للمتغير (Y_{t-3}) وهما (-0.05) فإنها تدل على علاقة عكسية بين الدخل والاستهلاك وهذا مخالف لنظرية الاستهلاك حيث أن علاقة الاستهلاك بالدخل علاقة طردية. هذه الإشارة العكسية توضح للباحث أيضاً أنه يجب التوقف عن إدخال فترات إبطاء وبالتالى تصبح صورة النموذج المقدرة السليمة والمتفقة مع النظرة الاقتصادية كالتالى:

$$\hat{C}_t = 8.5 + 0.5Y_t + 0.2Y_{t-1}$$

ويلاحظ هناك أننا أسقطنا المتغير (Y_{t-2}) حيث أنه ليس ذات معنوية إحصائية وأسقطنا المتغير (Y_{t-3}) بسبب الإشارة العكسية الغير متوقعة أو الغير مطابقة للنظرية الاقتصادية.

<u>عيوب هذا النموذج:</u>

١- إدخال فترات الإبطاء بدون معرفة مسبقة عن عددها يتولد عنها ترابط مما يترتب عليه عدم كفاءة التقدير ويؤثر على درجات الحرية.

٢- إدخال فترات الإبطاء بهذه الطريقة يعتمد على الطرق الإحصائية وليست مبنية على النظرية الاقتصادية.

نماذج الأسئلة

النموذج الأول

القسم الأول: أجيبي عن سؤالين فقط:

١- كيف يمكن إيجاد قيمة R^2 عن طريق انحرافات المتغيرات عن قيمها الأصلية؟

٢- كيف تحصلي على قيمة $\hat{b}_2$ بواسطة معامل الارتباط ؟

٣- ما هي المشكلة أو المشكلات المترتبة على : وجود اختلاف التباين ، عدم استقلال قيم العنصر العشوائي عن بعضها البعض وإسقاط فرض استقلال قيم المتغيرات التفسيرية عن بعضها؟

القسم الثاني: أعطيت لك المعلومات الآتية لـ (15) دولة:

حيث أن دخل الفرد الحقيقي بالألف دولار $Y=$

نسبة القوة العاملة في الزراعة $X_1 =$

متوسط سنوات التعليم للسكان فوق سن ٣٥ سنة $X_2=$

$n = 15 , \Sigma Y = 135 , Y = 4 , \Sigma X_1 = 105 , \Sigma X_2 = 180 , X_1 = 7$

$X_2 = 12 , \Sigma x_1 y = -28 , \Sigma x_2 y = 38 , \Sigma x_1 x_2 = -12$

$\Sigma x_1^2 = 60 , \Sigma x_2^2 = 74 , \Sigma y^2 = 40$

أ- اوجدى معادلة انحدار المربعات الصغرى للمتغير Y على X_{1i} , X_{2i} مع تفسير الناتج.

ب- اوجدى قيمة R^2.

ج- اختبر عند مستوى معنوية ٥% المعنوية الكلية للانحدار مع ذكر الفرض العدمي.

د- اوجدى معاملات الارتباط الجزئي وحددي أي متغير مستقل يساهم أكثر في قدرة النموذج التفسيرية؟

النموذج الثاني

أجيبي عن الأسئلة الآتية:

١- كيف تحصلي على قيمة $\hat{b}$ في الانحدار الخطى البسيط بطريقة المربعات الصغرى العادية OLS.

٢- ما هي المشكلات المترتبة على وجود مشكلة اختلاف التباين ومشكلة استقلال قيم المتغيرات التفسيرية عن بعضها وكيف يمكن التغلب على (معالجة) المشكلة الأخيرة.

٣- ما هو الفرق بين R^2 ، r^2 في معادلة خط الانحدار البسيط؟

اوجدى قيمة r^2 مستخدمة البيانات التالية:

$$\Sigma y_i^2 = 16 \quad \Sigma x_i y_i = 18 \quad \Sigma x_i^2 = 25$$

٤- إذا أعطي لك هذا النموذج

(دالة العرض): $Q^s_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + E_t$

(دالة الطلب) : $Q^D_t = B_1 + B_2 P_t + B_3 A_t + B_4 W_t + U_t$

حيث أن:

أسعار السلع الأخرى $= A_t$ سعر السلعة $= P_t$

الكمية المطلوبة $= Q^D_t$ ، الكمية المعروضة من السلعة $= Q^s_t$ ، الدخل $= W_t$

أ- وضح ما إذا كانت دالة العرض مميزة،وما هو نوع التمييز ؟

ب-ما هي الطريقة التي يمكن استخدامها لتقدير معلمات دالة العرض، وضحى ذلك.

ت-أوجدي النموذج المختزل لهذه المشكلة.

النموذج الثالث

السؤال الأول: ضع علامة صح أو خطأ أمام كل عبارة فيما يلي مع التعليق عليها.

١- هناك علاقة بين كثير من المتغيرات الاقتصادية بعضها ببعض مما يسبب مشكلة الازدواج الخطي.

٢- هناك علاقة بين التقدير المتحيز والارتباط السلسلي.

٣- يمكن التغلب على مشكلة اختلاف التباين إذا كانت هذه المشكلة متصلة بالمتغير X_{i1} بترجيح خط الانحدار كالتالي:

$$Y_i / X_i = a/X_{i1} + b_1X_{i1}/ X_{i2} + b_2 + \mu_i / X_{i2}$$

٤- اختلاف التباين في المتغير X_{i2} يعني أن $E(X_{i1}\ \mu_i\ ) = 0$

السؤال الثاني: تقيس b_1 مدى استجابة المتغير التابع للمتغير المستقل أو مدى ارتباط المتغير التابع بالمتغير المستقل مع ثبات العوامل الأخرى. اثبت ذلك بالتعبير عن قيمة $\hat{b}_1$ بواسطة معاملات الارتباط الجزئي مفسرة النتيجة التي حصلت عليها.

السؤال الثالث:

درست دالة الإنتاج لـ Cubb Douglas والتي تأخذ الصورة التالية:

$$Y_i = a\, X^{b1}_{i1}\, X^{b2}_{i2}$$

أ- ضعي هذا النموذج في صورة خط انحدار لتقدير معاملات الدالة.

ب-ما هي خواص هذه الدالة (أي مميزاتها).

ت-إذا أعطي لك نتائج الكمبيوتر لدالة الإنتاج Cubb Douglas كالتالي:

$$\text{Ln}\ \hat{Y}_i = 23.4 + 2.39\ \text{Ln}\ X_{i1} + 0.943\ \text{Ln}\ X_{i2}$$

$$(25.37) \qquad (37.25)$$

$$R^2 = 0.98 \qquad d.f = 12$$

حيث أن: دالة إنتاج الأرز Y_i ، أسعار الأرز X_{i1} ، دخل المستهلك X_{i2} ، والأرقام التي بين الأقواس تمثل t المحسوبة. فسري النتائج وكيف تحسب عدد مشاهدات العينة.

النموذج الرابع

السؤال الأول:

I. إذا أعطي لك هذا النموذج:

(دالة العرض)

$$Q^s_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t - \alpha_3 A_t + \alpha_4 W_t + E_t$$

(دالة الطلب)

$$Q^D_t = B_1 + B_2 P_t + U_t$$

حيث أن حالات الطقس = W_t ، أسعار السلع الزراعية = A_t ، سعر السلعة = P_t

أ- وضح ما إذا كانت دالة الطلب مميزة وما نوع هذا التمييز ؟

ب- ما الطريقة التي يمكن استخدامها لتقدير معلمات دالة الطلب ، وضح ذلك.

ت- اوجدي النموذج المختزل لهذا النموذج.

II. افترض أن النموذج الآتي معطى لك وتريد تقدير معلمات دالة النقود :

(دالة العرض)

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + U_{1t}$$

(دالة الطلب)

$$Y_t = B_1 + B_2 M_t + B_3 I_t + U_{2t}$$

حيث أن:الاستثمار = I_t

وكان تقدير معلمات النموذج المختزل كالتالي:

$$\hat{Y}_t = 85.2 + 103\ Y_{1t} \qquad R^2 = 0.91$$

$$\hat{Y}_t = 75.2 + 5.9\ I_t \qquad R^2 = 0.95$$

كيف يمكن تقدير معلمات دالة عرض النقود M_t باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة.

السؤال الثاني:

كيف يمكن الحصول على قيمة $\hat{b}_t$ في الانحدار المتعدد باستخدام معاملات الارتباط.

السؤال الثالث:

هناك مشكلات أساسية متعلقة بتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد. اذكري ثلاثة منها وما خطورة كل منها على تقدير معلمات خط الانحدار من حيث التحيز – الكفاءة والاتساق.

السؤال الرابع:

أعطيت لك المعلومات الآتية لـ (15) دولة حيث أن:

دخل الفرد الحقيقي بالألف جنيه = Y_i

نسبة القوة العاملة في الزراعة = X_1

متوسط سنوات التعليم للسكان = X_2

$n= 15, \Sigma Y_i=135, \bar{Y}=9, \Sigma X_1=105, x_1= 7, \Sigma Y_2=180, \bar{x}_2= 12,$

$\Sigma x_1y=-28, \Sigma x_2y=38, \Sigma x_1x_2=-12, \Sigma x_1^2=60, \Sigma x_2^2=47, \Sigma y^2=40$

أ- أوجد معادلة انحدار المربعات الصغرى للمتغير Y على X_1,X_2 مع تفسير النتائج؟

ب-أوجد قيمة R^2.

جـ- اختبر عند مستوى معنوية 5% المعنوية الإجمالية مع ذكر الفرض العدمي؟

د- أوجد معاملات الارتباط الجزئي وحدد أي متغير مستقل يساهم أكثر في قدرة النموذج التفسيرية؟

السؤال الخامس:

من خصائص تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى لخط الانحدار أنها خطية – غير متحيزة – لها أصغر تباين، اثبت ذلك.

النموذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ - اثبت أن تقدير معلمات خط الانحدار بطريقة المربعات الصغرى العادية خطي وغير متحيز.

٢- أوجد قيمة b واختبر معنويتها الإحصائية مستخدما البيانات الآتية:

$\Sigma e^2_i=75.8$, $\Sigma x_i y_i=50.9$, Σx^2_i , $n = 9$, $\alpha = 5\%$

أ- أوجد $\hat{b}$ مفسرا النتيجة التي حصلت عليها.

ب- اختبر معنويتها الإحصائية.

٣- إذا أعطي لك خط انحدار مقدر كالتالي:

$$\hat{Y} = -31.8 - 0.56\, X_{1i} + 21.6 X_{2i}$$

$$R^2 = .999,\ (1.6),\ \ (.96)$$

حيث توضح الأرقام بين الأقواس القيمة المحسوبة لـ t

أ- اختبر عند مستوى المعنوية 1% لمعلمات خط الانحدار أي $\hat{b}_1, \hat{b}_2$.

ب-اختبر المعنوية الكلية للانحدار المتعدد عند المستوى 5% مع توضيح الفرض العدمي والفرض البديل حيث عدد مشاهدات العينة $(n = 15)$

جـ- متى تساوي $(\hat{b}_1)$ في الانحدار المتعدد $(\hat{b})$ في الانحدار البسيط.

النموذج السادس

I. ما هي الفروض المتعلقة بكل خاصية من خواص طريقة المربعات الصغرى العادية لخط الانحدار.

١- خاصية التحيز.

٢- خاصية التوزيع الطبيعي لمعلمات خط الانحدار.

٣- خاصية الكفاءة.

II. إذا أعطي لك المعلومات الآتية:

$\Sigma x_i y_i = 8.696$, $\Sigma y_i^2 = 12.8$, $\Sigma x_i^2 = 7.77$, $n = 6$

١- أوجد R^2 واشرح ما حصلت عليه من نتيجة.

٢- أوجد تباين $\hat{b}$ ، ($var , \hat{b}$) وفسر ما حصلت عليه.

٣- اذكر الفرض العدمى والفرض البديل لاختيار معنوية المعلمة $\hat{b}$ مع شرح معنى كل من الفرض العدمي والفرض البديل وكيف يمكن عمل التقييم الإحصائي لمعنوية $\hat{b}$ (المقدرة). اختبر عند مستوى المعنوية 5% . إذا كانت a=b=0 هل يمكن تطبيق اختبار t وضح ذلك .

٤- ما هي مبررات إضافة عنصر الخطأ العشوائي فى العلاقة الدالية المستخدمة في الاقتصاد، وما معنى الافتراضات الخاصة بهذا العنصر في معادلة خط الانحدار – اشرح باختصار.

النموذج السابع

السؤال الأول:

ضع علامة صح أو خطأ على العبارات التالية مع التعليق عليها:

أ- يمكن التعبير عن معامل التحديد (R^2) للانحدار المتعدد بدلالة معاملات الارتباط البسيط بين المتغيرات.

ب-ليس من الضروري أن تنطوي علاقة الانحدار بين متغيرين على علاقة سببية.

ت- b_2 تقيس التغيير في متوسط قيمة Y_i مع ثبات X_{i1}.

السؤال الثاني:

إذا أعطي لك هذه الدالة:

$$Q_i = AL^{\alpha} + K^{B}$$

حيث أن رأس المال = K، العمل = L، الكمية = Q

١- ما هي خصائص هذه الدالة؟

١- ضع هذا النموذج في صورة خط انحدار لتقدير معاملاته.

السؤال الثالث:

أعطي لك هذه المشاهدات عن الكميات المطلوبة من منتج ما وسعر الوحدة منه (السائد في السوق – منافسة كاملة) وطلب منك أن توضح مدى تأثر الكمية المطلوبة بالسعر. ما هي الخطوات التي يجب عليك إجرائها لمعرفة مدى أهمية السعر بالنسبة للكمية المطلوبة (باستخدام t). وما مدى أهمية المعلمات ككل بالنسبة للمتغير التابع.

ضع الفرض العدمى والفرض البديل:

Y_i	2	5	7	10	11
X_i	5	6	9	12	13

حيث أن:

t المحسوبة : $t_{.01} = 2.35$, $t_{.05} = 4.541$

النموذج الثامن

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: أعطي لك النموذج التالي:

$$Y_i = AX^{\alpha}_{i1}X^{B}_{i2}$$

وكانت نتائج تقدير هذا النموذج كالتالي:

$$\text{Ln } Y_i = 7.5 + 0.5 \text{ Ln } X_{i1} + 0.5 \text{ Ln } X_{i2}$$

$$(25.73) \qquad (37.25)$$

$$R^2 = 0.63 \qquad d.f = 15$$

حيث أن:

عدد العمال = X_{i1} ، كمية الإنتاج = Y_i ، مقدار رأس المال = X_{i2} ، والأرقام التي بين الأقواس تمثل الانحراف المعياري.

والمطلوب:

١- ما هي خصائص الدالة المذكورة قبل التقدير وهل هي في شكلها الرياضي أو القياسي؟ حول هذه الدالة إلى العلاقة المناسبة للتقدير.

٢- اختبار المعنوية الإحصائية لكل من معلمة X_{i1} ، X_{i2} .

٣- تفسير نتائج النموذج المقدر مع الإشارة إلى نوع هذه الصناعة (هل هي متزايدة العائد أو متناقصة العائد أو ثابتة العائد؟).

٤- ما عدد مشاهدات هذه العينة، أوجد معامل التحديد المعدل (R^2).

السؤال الثاني:

أ- لماذا يمثل اختلاف التباين مشكلة بالنسبة لطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) ، كيف يمكن اكتشافها ومعالجتها ؟

ب- إذا كان لدينا عينة عشوائية عن الاستهلاك وكان عدد مشاهدات هذه العينة 50 وعدد المشاهدات المخزونة = 10 وعدد المتغيرات التي في النموذج 4 ، وقد رتبت المشاهدات تنازليا وكان $ESS_1=2.35$, $ESS_2= 1.98$.

المطلوب:

معرفة ما إذا كان هناك مشكلة في هذه البيانات.

اتبع الخطوات العلمية المدروسة في ذلك.

السؤال الثالث:

أ- عرف الاقتصاد القياسي مع ذكر خطوات البحث في مجال الاقتصاد القياسي؟

ب- علق على العبارات التالية:

١- العلاقات في المجال الاقتصادي تتميز بأنها علاقة غير ضبطية.

٢- القياس بلا نظرية ليس حلا مرضيا.

جـ- كيف يمكن اختبار المعنوية الكلية للانحدار المتعدد مع ذكر الفرق بين اختبار (t) واختبار(F).

نماذج امتحانات

النموذج الأول

السؤال الأول:

١- كيف تحصلين على تقدير $\hat{b}$ من معادلة خط الانحدار $Y_i = a + bX_i + \mu_i$ بطريقة المربعات الصغرى العادية (باستخدام الطريقة العادية).

٢- اثبتي أن طريقة المربعات الصغرى العادية تتميز بأنها غير متحيزة.

٣- كيف تحسبين تباين $\hat{b}$ باستخدام تباين المجتمع.

السؤال الثاني:

١- كيف تختبري معنوية المعلمات لنموذج خط الانحدار البسيط.

٢- اثبتي أن

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

٣- ما هو الفرق بين :

أ- a ، $\hat{a}$.

ب- μ_i ، e_i .

جـ - R^2، t .

النموذج الثاني

السؤال الأول:

اثبتي أن طريقة المربعات الصغرى العادية خطية و غير متحيزة.

السؤال الثاني:

أ- تقدير التباين – أكملي

$\hat{b} = \Sigma w_i y_i$ $\qquad$ $Y_i = a + b X_i + \mu_i$

ب- أكملي: $\sigma^2_u = $ ______

السؤال الثالث:

التقييم الاحصائى لمعلمات النموذج – كيف تقيمين معلمات النموذج.

السؤال الرابع:

ضعي علامة (صح) أو (خطأ) مع التصحيح:

١- $t = \dfrac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}}$

٢- $S_{\hat{b}} = \sqrt{\dfrac{\Sigma e^2_i / (n-2)}{\Sigma x^2_i \; \Sigma y^2_i}}$

٣- (المحسوبة) $t = \dfrac{\Sigma x_i y_i / \Sigma x^2_i}{\sqrt{\dfrac{\Sigma e^2_i / (n-2)}{\Sigma x^2_i}}}$

السؤال الخامس:

أ- اشتق R^2 من تحليل التباين

$$TSS = RSS + ESS$$

ب- $R^2 = 0$ ، $R^2 = 1$ ، $R^2 = -0.01$ فسرى ولماذا R^2 سالبة

النموذج الثالث

١- ما هي الفروض التي يقوم عليها تقدير نموذج الانحدار الخطى المتعدد.

٢- اوجدى $\hat{b}_1$ بطريقة المربعات الصغرى العادية لخط الانحدار المتعدد

$$Y_i = a + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \mu_i$$

٣- ضعي هذا النموذج في صورته المقدرة و اشرحي معلماته

$$Y_i = \beta_o X^{\beta 1}{}_{i1} X^{\beta 1}{}_{i2} e^{\mu i}$$

٤- أوجدي R^2 باستخدام انحرافات القيم عن وسطها الحسابي لكل من x_i ، y_i.

٥- ضعي علامة (صح) أو علامة (خطأ) أ.'م كل من العبارات الآتية مع التعليق:

أ- $E(b) = \hat{b}$

ب- $t = \dfrac{E(b)}{\sqrt{Var(\hat{b})}}$

جـ- $R = \sqrt{1 - \dfrac{\Sigma e^2_i}{\Sigma y^2_i}}$

د- $R = \sqrt{1 - \dfrac{\Sigma e^2_i}{n-2}}$

النموذج الرابع

أجيبي عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

ضعي علامة (√) أو (X) أمام كل عبارة مع تصحيح الخطأ:

١- $\hat{b} = \dfrac{\Sigma x^2_i y_i}{\Sigma x^2_i}$

٢- $E(\hat{b}) = b + \Sigma w_i E(\mu_i)^2$

٣- $Var(\hat{b}) = (\hat{b}-b)$

٤- $Var(\hat{a}) = \dfrac{\sigma^2_u \Sigma x^2_i}{n\Sigma x^2_i}$

٥- $\hat{y}_i = \hat{Y}_i - Y_i$

٦- $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

السؤال الثاني: ما هي علاقة R^2 بـ $\overline{R}^2$.

السؤال الثالث: اذكري علاقة F ومعامل الانحدار R^2.

السؤال الرابع: ما معنى المعلمات الجزئية للانحدار المتعدد.

النموذج الخامس

١- ما معنى المعلمات الجزئية لخط الانحدار المتعدد.

٢- إذا كانت النتائج لتقدير دالة كالتالي:

$$\hat{Q} = 367.5 + 54.5D$$

$$(6.591) \quad (.640)$$

$$F = .409 \quad R^2 = \%76 \quad \overline{R^2} = .109$$

فسري هذه النتائج حيث أن D هي متغير صوري يعبر عن استخدام عامل (أحد العمال الجدد)

٣- ماذا تعرفين عن المعادلات الآنية.

٤- ضعي علامة √ أو X مع تصحيح الخطأ:

أ- $E(\hat{b})=b$

ب- $R^2 = \sqrt{1 - \frac{\Sigma e_i^2}{n-2}}$

جـ- $E(\hat{b}) = b + \Sigma w_i E(\mu_i)$

النموذج السادس

١- اذكري علاقة F بمعامل الانحدار R^2 ، وعلاقة R^2 بمعامل الانحدار $\overline{R^2}$.

٢- ما معنى المعلمات الجزئية للانحدار المتعدد.

٣- أعطيت لك هذه العلاقة (النموذج المقدر) .

$$\text{Ln } \hat{Q} = 38.3 + 2.35 \text{ Ln}(L) + 0.38 \text{ Ln}(K)$$

(المحسوبة) t = (13.3) (7.5)

$R^2 = 0.98$ $\overline{R^2} = 0.95$

فسري هذه النتائج وما معنى هذه الأرقام وكيف حصلنا عليها أي ما هي صورة العلاقة الرمزية.

النموذج السابع

السؤال الأول:

إذا كان لديك شخصان أحدهما سعودي ولآخر أجنبي وكن لديك وظيفة معينة فكيف تختاري أحدهما. هذه الوظيفة في مصنع ينتج الجبن مثلا.

السؤال الثاني:

اذكري ما تعرفينه عن المتغيرات الصورية .

السؤال الثالث:

فسري النتائج التالية:

$$\hat{Q} = 0.132 + 2.34\,D$$
$$(0.17) \quad (32.3)$$

حيث أن $\hat{Q}$ الكمية المنتجة من الجلباب العربي.

السؤال الرابع:

ماذا تعرفين عن نموذج المعادلات الآنية.

النموذج الثامن

السؤال الأول:

قارني بين مشكلات خط الانحدار المتعدد من حيث التحيز والكفاءة في التقدير وكيفية معالجة المشكلة والكشف عنها – اختاري فقط اثنين من بين هذه المشكلات .

السؤال الثاني:

أ- نموذج المعادلات الآتية له أهمية كبرى فماذا تعرفين عنه و طرق تقديره.

ب- تستخدم المتغيرات الصورية في استخدامات مختلفة وضحي ذلك.

جـ- اثبتي أن طريقة المربعات الصغرى خطية ولها أصغر تباين.

السؤال الثالث:

ضعي علامة (√) أو (X) أمام كل عبارة مما يلي:

١- $t = \dfrac{b}{S_{\hat{b}}}$

٢- $S_b = \sqrt{\dfrac{\Sigma e_i^2 / (n-k)}{\Sigma x_i^2}}$

٣- $t = \dfrac{\Sigma x_i y_i / \Sigma x_i^2}{\sqrt{\sigma^2_{\hat{b}}}}$

٤- $\overline{R}^2 = (1-R^2)R^2$

٥- $F = R^2/ (1-R^2)$

٦- $F = \dfrac{ESS(\text{للقيم الصغرى})}{ESS(\text{للقيم الكبرى})}$

٧- $\hat{Y}_i = \hat{a} + b_1\hat{X}_{i1} + b_2\hat{X}_{i2} + E(\mu_i)$

٨- $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_{i1} X_{i1} + \hat{\beta}_{i2} X_{i2} + e_i$

٩- $\sum e_i = 1$

١٠- if ESS > RSS

Then $R^2 > 0$

السؤال الرابع:

أ- فسري النتائج التالية وكيف تكتشفين إذا كان هناك مشكلة ترابط سلسلي أم لا:

$$\hat{Y}_i = 0.25 + 2.32\, X_{i1} - 0.75\, X_{i2}$$

$$(0.232) \quad (-2.4)$$

$$R^2 = 0.32 \quad D.F = 12 \quad D.W = 0.32$$

ب-الأرقام الموضحة بين الأقواس توضح الانحراف المعياري لمعلمات النموذج ،كيف تحصلين على تقدير لـ (t) حتى تبني المعنوية الإحصائية للنموذج .

جـ ما هو عدد مشاهدات العينة؟

د- إذا أعطيت هذه البيانات الموجودة في الجدول التالي:

الاستهلاك من سلعة ما(C)	الدخل(Y)
2	10
5	50
15	100
12	80
10	60
$\Sigma C_i =$	$\Sigma Y_i =$

ودالة الاستهلاك كالتالي: $C_i = a + bY_i + \mu_I$ والمطلوب:

- إيجاد تقدير (b)
- إيجاد قيمة t والتي تعبر عن مدى أهمية الدخل بالنسبة لاستهلاك هذه السلعة.
- إيجاد R^2.
- إيجاد F.

الفهـــرس